Sammlung Göschen

Geschichte der Mathematik

[...]um Ausgange des 18. Jahrhunderts

Von

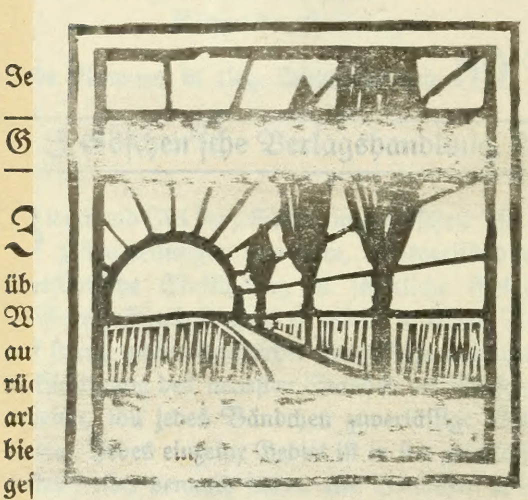
Prof. A. Sturm

Mit 7 Figuren



Sammlung Göschen

Unser heutiges Wissen
in kurzen, klaren,
allgemeinverständlichen



Je[...] Pf.

G[...]pzig

[...] Ein-
[...] und
üb[...] der
W[...]men,
au[...] Be-
rü[...]g be-
ar[...]rung
die[...] dar-
ge[...]erem
Zusammenhange miteinander, so daß das Ganze, wenn
es vollendet vorliegt, eine einheitliche, systematische
Darstellung unseres gesamten Wissens bilden dürfte.

Ein ausführliches Verzeichnis der bisher erschienenen
Nummern befindet sich am Schluß dieses Bändchens

Mathematische Bibliot 336
aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden 80 Pfennig.

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I. Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

— — **II**: Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Mit 52 Fig. im Text. Nr. 436.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Koordinatensysteme von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichtenfelde. Nr. 507,

Ebene Geometrie m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.

— — **II.** Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Wahrscheinlichkeitsrechnung von Dr. Franz Hack, Professor am Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart. Mit 15 Figuren im Text. Nr. 508.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.

Stereometrie mit 66 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.

Niedere Analysis m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.

Wenden!

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Einführung in die geometrische Optik von Dr. W. Hinrichs in Wilmersdorf-Berlin. Nr. 532.

Versicherungsmathematik v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.

Vektoranalysis mit 11 Figuren von Professor Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neubearbeitet von Prof. Dr. Herm. Kobold. **I:** Das Planetensystem. Mit 33 Abbildungen. Nr. 11.

— — **II:** Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Nr. 529.

Astrophysik mit 15 Abbildungen von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus, neubearbeitet von Dr. H. Ludendorff. Nr. 91.

Vermessungskunde von Oberlehrer Dipl.-Ing. P. Werkmeister. 2 Bändchen mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

Sammlung Göschen

Geschichte der Mathematik

bis zum Ausgange des 18. Jahrhunderts

Von

Ambros Sturm
Professor am k. k. Obergymnasium in Seitenstetten

Mit 7 Figuren

Zweite, verbesserte Auflage



Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1911

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

Literatur.

Einige neuere Werke über Geschichte der Mathematik:

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bde. Leipzig 1900—1908.

Günther, S., Geschichte der Mathematik I. Leipzig 1908.

Wieleitner, H., Geschichte der Mathematik II, 1. Hälfte. Leipzig 1911.

Ball, R., History of Mathematics. London 1908.

Smith, D. E., History of modern Mathematics. New York 1906.

Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik. 2 Bde. Leipzig 1902 bis 1903.

Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Leipzig 1903.

v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 Teile. Leipzig 1900, 1903.

Loria, G., Le Scienze essate nell'antica Grecia. Modena 1893—1900.

Zeuthen, Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Kopenhagen 1896.

Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauß. Leipzig 1895.

Müller, Felix, Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik. Leipzig 1892.

Fink, Kurzer Abriß der Geschichte der Elementarmathematik. Tübingen 1890.

Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.

Günther, S., Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter. Berlin 1887.

Tannery, Paul, La géometrie Grecque. Paris 1887.

Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Kopenhagen 1886.

Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra. Leipzig 1878.

Suter, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters. Zürich 1877.

Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877.

Allman, Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin 1877.

Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. 2. ed. Paris 1875. (Deutsch von Sohncke. Halle 1839.)

Cantor, M., Die römischen Agrimensoren. Leipzig 1875.

Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 2 Teile. Zürich 1873, 1875.

Hankel, H., Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Leipzig 1874.

Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklid. Leipzig 1870.

Cantor, M., Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863.

Der Geschichte der Mathematik sind gewidmet:

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. (Leipzig.) Begründet von Moritz Cantor.

Bibliotheca mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. (Leipzig.) Herausgegeben von Gustav Eneström.

I. Altertum.

1. Ägypter und Mesopotamier.

Fragen wir nach den ältesten Heimstätten wissenschaftlicher mathematischer Forschung, so verweisen uns sowohl die Berichte der griechischen Schriftsteller als auch die Ergebnisse der Altertumsforschung nach den alten Kulturzentren im Tale des Nil und im Zweistromlande.

Lassen einerseits die bureaukratischen Einrichtungen des alten Ägypten auf ein entwickeltes Rechnungswesen schließen, so sind andererseits die Feldmessung und die mächtigen Bauwerke — nach streng geometrischen Gesetzen und mit genauer Orientierung — beredte Zeugen für bedeutende Kenntnisse auf dem Gebiete der praktischen Geometrie. Neuere Funde bestätigen und ergänzen diese Schlüsse in willkommener Weise.

Ein mathematisches Handbuch aus der Zeit zwischen 2000 und 1700 v. Chr., verfaßt nach älteren Schriften von Ahmes dem Schreiber, bezeugt ein ausgebildetes Rechnen in ganzen und gebrochenen Zahlen mit systematischer Zerlegung in Stammbrüche (mit dem Zähler 1), z. B. $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$; $\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$; es bietet ferner eine Anzahl eingekleideter Aufgaben über Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten (z. B. Haufen sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es gibt 37; d. h. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + x = 37$), Gesellschaftsrechnung,

arithmetische und geometrische Reihen. Das Handbuch enthält ferner Berechnungen von Rechtecken, gleichschenkligen Dreiecken und gleichschenkligen Trapezen, eine Quadratur des Kreises und Ausrechnungen verschiedener Körper. Auch treten gewisse Streckenverhältnisse, die zu wiederholter Konstruktion eines Winkels verwendet werden und für die Steilheit der Pyramiden bestimmend sind, mit besonderen Namen auf.

Die Berechnung des gleichschenkligen Dreieckes mit der Grundlinie a und der Seite b erfolgt nach der Formel $\frac{ab}{2}$, die des gleichschenkligen Trapezes mit den Parallelseiten a, c und der nicht parallelen Seite b nach der Formel $\frac{1}{2}(a + c)\,b$. Diese Näherungsformeln haben sich durch Jahrtausende erhalten. Wir finden sie wieder in den Schriften Herons von Alexandria (wahrscheinlich im 1. Jahrh. v. Chr.), aus denen sie in die römische Feldmeßkunst und dadurch auch in die Mathematik des Mittelalters übergingen. Zum Zwecke der Kreisquadratur nimmt Ahmes die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates als $\frac{8}{9}$ des Durchmessers an, so daß sich $\pi = 3,\,1604\ldots$ ergibt.

Das Handbuch des Ahmes, dieses ehrwürdige Denkmal unserer Wissenschaft, wurde in einer Blechkapsel verwahrt aufgefunden und befindet sich als Papyrus Rhind im Britischen Museum. Es besteht aus einer Rolle gelbbraunen Papiers von 20 m Länge und 30 cm Breite.

Während die Griechen als ihre Lehrmeister in der Geometrie die Ägypter bezeichneten, rühmten sie den Babyloniern bedeutende arithmetische Kenntnisse nach. In der Tat besaßen die Bewohner Mesopotamiens die Kenntnis der arithmetischen und geometrischen Reihen, sie lehrten die Heiligkeit und geheimnisvolle Kraft gewisser Zahlen und Verhältnisse — eine Lehre, der wir an den verschiedensten Orten wieder begegnen. Überdies setzen ihre astronomischen Berechnungen, ihr rationelles Maßsystem und das von ihnen konsequent

ausgebildete Sechziger-Zahlensystem eine nicht geringe mathematische Einsicht voraus. Zwei Tontäfelchen aus der Zeit zwischen 2300 und 1600 v. Chr., die der Geologe Loftus 1854 bei Senkereh am Euphrat entdeckte, enthalten, wie Rawlinson erkannte, die Quadrate der ganzen Zahlen bis 60 und die Kuben der Zahlen bis 32, im Sexagesimalsystem unter Benutzung des Stellenwertes geschrieben, so zwar, daß z. B. 64 durch die Zeichen für 1 und 4 ausgedrückt ist.

Da es unmöglich ist, alle Zahlen bis zu einer einigermaßen beträchtlichen Höhe durch neue Wörter zu bezeichnen, so kam es schon in ältester Zeit zur Bildung systematischer Anordnungen, welche die Benennung aller Zahlen durch geeignete Verknüpfung weniger Wörter ermöglichten. Am verbreitetsten ist das Zehnersystem, das je zehn Einheiten einer Stufe zu einer Einheit der nächst höheren Stufe zusammenfaßt, daher nur für die Zahlen der Einerstufe (von Eins bis Neun) und für die Stufenzahlen (Zehn, Hundert, Tausend, ...) eigene Namen zu schaffen braucht, um jede beliebige Zahl als ein nach Potenzen von Zehn geordnetes Polynom darzustellen. Seine Entstehung verdankt dieses System der von alters her gebräuchlichen Abzählung an den Fingern. Ebenso entstand das in vielen Sprachen hervortretende, wenn auch niemals konsequent durchgeführte Fünfersystem durch Abzählen an den Fingern einer Hand und das bei den Azteken und Kelten gebräuchliche Zwanzigersystem durch Abzählen an Fingern und Zehen (vgl. franz. quatre-vingt). Sehen wir die Menschen bei Aufstellung dieser Systeme mehr unbewußt der Anleitung der Natur folgen, so waltete dagegen der reflektierende Geist bei der Schaffung des Zwölfer- und Sechzigersystems, die — entsprechend den praktischen Bedürfnissen — bequeme Teilungen, besonders in Halbe, Drittel und Viertel, gestatteten, und daher für Maß, Gewicht und Währung zu weiter Verbreitung gelangten. Ihre innere Berechtigung wird durch den zähen Widerstand bezeugt, den sie dem Vordringen des Zehnersystems entgegensetzen. Insbesondere behauptet das babylonische Sechzigersystem in der Zeit-, Kreis- und Winkelteilung noch heute seine mindestens viertausendjährige Herrschaft.

2. Griechen.

a) Voreuklidische Zeit.

Die keineswegs unbedeutenden, aber wenig geordneten und nur auf praktische Zwecke gerichteten Kenntnisse der Ägypter wurden von den Griechen zur Zeit, als sie sich für wissenschaftliche Forschungen zu interessieren begannen, übernommen. Thales, Pythagoras, Plato, Anaxagoras, Eudoxus u. a. brachten mathematisches Wissen aus dem geheimnisvollen Lande der Pharaonen in die Heimat. Mit instinktivem Feingefühle erkannten diese Männer rasch die eigentliche Bedeutung und den wissenschaftlichen Charakter der Mathematik und unter ihren Händen erstand das vollendete Gebäude der antiken Geometrie, dem, was Gedankenstrenge anbelangt, kaum ein anderes Menschenwerk an die Seite gesetzt werden kann.

Im Mittelpunkte der Entwicklung der griechischen Mathematik steht Euklid (um 300 v. Chr.). Sein Hauptwerk, die „Elemente", bildet einerseits den Abschluß der älteren Periode und andererseits die Grundlage für den weiteren Ausbau unserer Wissenschaft.

In der voreuklidischen Zeit sind es vorzüglich drei Persönlichkeiten, die maßgebend in die Entwicklung der Mathematik eingriffen, Pythagoras im 6. Jahrh., Plato und Eudoxus im 4. Jahrh.

Nach den übereinstimmenden Berichten brachte Thales von Milet (640—548 v. Chr.), der Begründer der ionischen Naturphilosophie, zuerst geometrische Kenntnisse aus Ägypten nach Griechenland. Ohne die Einzelheiten einzugehen, können wir im allgemeinen feststellen, daß er und seine Nachfolger die Handwerksregeln der ägyptischen Mathematik vertieften und erweiterten.

Zu einer eigentlichen Wissenschaft aber wurde die Mathematik durch Pythagoras (580—501 v. Chr.) erhoben, der nach längerem Aufenthalte in Ägypten zu Kroton seine berühmte Schule gründete. In ihr wurden die allgemeinen Grundsätze und der ideale Charakter der Mathematik für alle Zeit festgestellt und das logische Element, die Forderung des Beweises, eingeführt.

Die hohe Wertschätzung und eifrige Pflege dieser Wissenschaft gründet sich auf die philosophischen Überzeugungen der Pythagoreer, die nicht, wie die ionischen Naturphilosophen, in der Materie, sondern in der Form das Wesen der Dinge suchten. Ausgestattet mit feinem Schönheits- und Formensinne, geübt durch eifrige Naturbetrachtung, erkannten diese Denker hinter dem steten Wechsel der Erscheinungen das waltende Gesetz, das in Größen- und Zahlenbeziehungen seinen Ausdruck findet. Daher nannten sie die Welt Kosmos, das Geordnete, und die Zahl galt ihnen als das wirklich Seiende, das Wesen der Dinge. Die in der physischen Welt stattfindenden Zahlenbeziehungen mußten nach ihrer Ansicht auch in der moralischen Welt gelten, sofern dort Ordnung und Harmonie herrschen soll. So erhielt ihre Zahlenlehre einen mystischen Beigeschmack und zeigte Anknüpfungspunkte an die Lehren der Babylonier.

Als im Anfange des 5. Jahrh. infolge politischer Wirren in Großgriechenland die Mitglieder des pythagoreischen Bundes verbannt wurden, gelangten ihre bisher geheim gehaltenen Entdeckungen in die Öffentlichkeit und wurden Gemeingut der Nation. Als hervorragende Pythagoreer der späteren Zeit sind zu nennen Philolaus (um 450 v. Chr.) und Archytas von Tarent (430—365). Außerhalb der pythagoreischen Schule sind als Mathematiker bedeutend Anaxagoras (499—418), Hippokrates von Chios (um 440), Demokrit (460 bis 370), Hippias von Elis (geb. um 460).

Der Hauptsitz der Wissenschaften war jetzt Athen. Durch Theodorus, den Lehrer Platos, und durch

Archytas, den Freund des Plato und Eudoxus, ist die Verbindung der pythagoreischen Schule mit der Akademie Platos und der mathematischen Schule des Eudoxus in Cyzikus hergestellt.

Plato (429—348 v. Chr.) schätzte die Mathematik sehr hoch, weil sie sich nur mit Ideen beschäftigt und daher den Geist vom Sinnfälligen, Nichtseienden, zu den Ideen, dem Seienden, hinwendet und ihn befähigt, die höchsten Ideen des Wahren, Schönen und Guten zu erfassen, was das Endziel der Philosophie ausmacht. Darum belebte Plato seine Schriften mit zahlreichen Ausblicken auf mathematische Gebiete, legte seinen Schülern mathematische Probleme vor und gab ihnen geeignete Methoden an die Hand. In regem Verkehre mit der Akademie standen Eudoxus (4. Jahrh.) und seine Schule. Aristoteles (384—322) bildete besonders die Systematik unserer Wissenschaft aus.

Die Forschungsweise der Pythagoreer wird von M. Cantor treffend der Weg des mathematischen Experimentes genannt. Nur auf diesem Wege, den übrigens schon die Ägypter betreten hatten, war es möglich, in kurzer Zeit eine solche Fülle von Kenntnissen zu sammeln.

Wir erblicken in den Pythagoreern die Begründer der Zahlentheorie. Sie unterschieden gerade und ungerade Zahlen, Primzahlen (Linienzahlen) und zusammengesetzte Zahlen (Flächen- und Körperzahlen). Durch mancherlei Summierungen, die sie in der Zahlenreihe vornahmen, bildeten sie den Begriff der gesetzmäßigen Reihe aus und gelangten zu den höheren arithmetischen Reihen, zu den Dreieckszahlen $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ durch Summierung sämtlicher aufeinanderfolgender Zahlen von 1 bis n, zu

den Quadratzahlen durch Summierung der ungeraden und zu den heteromeken Zahlen $[n(n+1)]$ durch Summierung der geraden Zahlen. So wurde der Grund zur Theorie der Vieleckszahlen gelegt, die zuerst von Philippus Opuntius, einem Schüler des Plato, systematisch behandelt wurde. Zahlen, von denen jede gleich der Summe der Teiler der anderen ist, z. B. 220 und 284, nannten sie befreundet. Vollkommen hieß eine Zahl, die gleich ist der Summe ihrer Teiler, z. B. 6,28.

Wenn auch derartige Untersuchungen einigermaßen den Charakter einer Spielerei tragen, so boten sie doch in Altertum und Mittelalter mancherlei Gelegenheit zu mathematischer Geistesübung. So finden wir z. B. in dem Drama „Sapientia" der Hrothswitha von Gandersheim (10. Jahrh.) die erwähnten Zahlengattungen ausführlich abgehandelt.

Nach babylonischem Vorbilde beschäftigten sich die Pythagoreer mit der Lehre von den Proportionen. Sie unterschieden die arithmetische, geometrische und harmonische Proportion und die entsprechenden mittleren Proportionalen: $\frac{a+c}{2}$, $\sqrt{ac}$, $\frac{2ac}{a+c}$.

Noch mehr bewundern wir die Fortschritte auf algebraischem Gebiete. Unter dem Namen Epanthem des Thymaridas ist aus pythagoreischer Zeit ein Satz überliefert, den wir unter Anwendung moderner Bezeichnungsweise so aussprechen können: Wenn n Unbekannte (*ἀόριστα*) $x_1, x_2, \ldots x_n$ vorliegen und außer ihrer Gesamtsumme $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$ noch die Summen der ersten mit jeder folgenden $x_1 + x_2 = a_1$, $x_1 + x_3 = a_2$, $\ldots x_1 + x_n = a_{n-1}$ gegeben (*ὡρισμένα*) sind, so ist $x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - s}{n-2}$. Weitere algebraische Leistungen der Pythagoreer stehen in

untrennbarem Zusammenhange mit ihrer Geometrie, in deren Mittelpunkte der nach dem Meister benannte Lehrsatz steht. Die für das von alters her als rechtwinklig bekannte Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 gemachte Bemerkung, daß $3^2 + 4^2 = 5^2$, wurde schrittweise auf die übrigen rechtwinkligen Dreiecke ausgedehnt.

Die Rechtwinkligkeit des Dreieckes mit den Seiten 3, 4, 5 war eine alte Erfahrungstatsache. Es ist wahrscheinlich, daß die Harpedonapten (Seilknüpfer) bei den Ägyptern davon Gebrauch machten, um aus der Nordsüdrichtung die Ostwestrichtung bei ihren Bauten festzulegen. Zu diesem Zwecke wurde ein Seil von der Länge 12 durch Knoten in die Teile 3, 4, 5 geteilt. Wurde nun die Seite 3 in der Richtung der Nordsüdlinie durch Pflöcke befestigt und das Seil ausgespannt, so gab die Seite 4 die gewünschte Senkrechte. Die Kenntnis dieses rechtwinkligen Dreieckes finden wir ferner schon in alter Zeit bei den Indern, die sich einer ähnlichen Seilspannung bedienten, und bei den Chinesen. Vielleicht hatte diese Kenntnis Einfluß darauf, daß man die Meßkette gerade in 12 Einheiten teilte, um durch sie bequem rechte Winkel abzustecken.

Der Weg des mathematischen Experimentes, auf dem man zur Kenntnis des pythagoreischen Lehrsatzes gelangte, führte bei Betrachtung des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes zur Entdeckung des Irrationalen, der bedeutungsvollsten Errungenschaft der Pythagoreer. Sie erkannten, daß bei zur Einheit kommensurabler Kathete die Hypotenuse zur Einheit inkommensurabel, durch keine Zahl benennbar, daher ein „*ἄῤῥητον*“ und „*ἄλογον*“ (ohne Verhältnis) ist. Es entsprach also jeder Zahl eine Strecke, aber nicht jeder Strecke eine Zahl. Denn der Gedanke einer Irrationalzahl, die zur Einheit nicht einmal ein aussprechbares Verhältnis hätte, lag den griechischen Mathematikern ferne. Da sie aber die Tragweite dieser Entdeckung vollständig zu würdigen wußten, so widmeten sich die hervorragendsten

Mathematiker (Demokrit, Archytas, Plato, Theätet, Eudoxus) dem Studium derselben. Welche Vorsicht sie dabei an den Tag legten, zeigt die Erzählung Platos, sein Lehrer Theodorus habe bewiesen, daß $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . . bis $\sqrt{17}$ nicht in Zahlen angebbar sind. Theätet (um 390 v. Chr.) hat dann den Begriff des Irrationalen auch auf dritte Wurzeln ausgedehnt.

Durch die Entdeckung des Irrationalen waren alle früheren Beweise über Flächenmessung, Ähnlichkeit usw. hinfällig geworden. Das 4. Jahrh. widmete sich der methodischen Arbeit, die neuen Grundlagen festzustellen. Als eigentlicher Schöpfer der wissenschaftlichen Proportionenlehre ist Eudoxus anzusehen. Durch dieses fortwährende Bestreben, alle Sätze auch auf die inkommensurablen Größen auszudehnen, gestaltete sich die griechische Mathematik zur eigentlich exakten Wissenschaft.

In Verbindung mit diesen Fragen steht die rationale Auflösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Die Pythagoreer gingen dabei aus von einer ungeraden Zahl $2\alpha + 1$ als kleinerer Kathete; dann ist die Hälfte des um 1 verminderten Quadrates $2\alpha^2 + 2\alpha$ die größere Kathete. Diese um 1 vermehrt, gibt die Hypotenuse $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$. Natürlich umfaßt diese Lösung nur einen kleinen Teil der überhaupt denkbaren Lösungen. Eine andere Regel gab Plato, der von einer geraden Zahl 2α als Kathete ausging. Wird vom Quadrate der halben Zahl 1 subtrahiert, so hat man die andere Kathete $\alpha^2 - 1$, wird dagegen 1 addiert, die Hypotenuse $\alpha^2 + 1$.

Zur Auflösung quadratischer Gleichungen bedienten sich die Pythagoreer der sogenannten Flächenanlegung, indem sie die in den Gleichungen $ax = b^2$, $ax - x^2 = b^2$, $ax + x^2 = b^2$ enthaltenen Aufgaben folgendermaßen aussprachen: An eine gegebene Strecke ein Rechteck so

anzulegen (παραβάλλειν), daß es 1. gleich ist einem gegebenen Quadrate, daß es 2. ein gegebenes Quadrat um ein Quadrat übertrifft (ὑπερβάλλει), daß ihm 3. noch ein Quadrat mangelt (ἐλλείπει), um einem gegebenen Quadrate gleich zu sein. In bezug auf die zweite Aufgabe, die hyperbolische Flächenanlegung, war für die Pythagoreer von besonderer Bedeutung die Teilung einer Strecke a nach der Proportion $a : x = x : (a - x)$, mittels der sie das regelmäßige Fünfeck erhielten. Dadurch gelangten sie auch zur Kenntnis des fünften regelmäßigen Körpers, des Dodekaeders. Die Konstruktion der fünf regelmäßigen Körper und ihre Einbeschreibung in die Kugel wird von den Alten als eine Hauptleistung der Pythagoreer gefeiert.

Die Bezeichnung „Goldener Schnitt" für die Teilung nach der Proportion $a : x = x : (a - x)$ ist erst um die Mitte des 19. Jahrh. aufgekommen, vermutlich im Anschlusse an Keplers „sectio divina".

Daß die Pythagoreer der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks große Wichtigkeit beilegten, geht daraus hervor, daß sie dem Sternfünfeck, das aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks besteht, dem sogenannten Pentagramm, mancherlei mystische Bedeutung zuschrieben und es zum Erkennungszeichen ihres Bundes machten.

Da nach platonischer Lehre die Elemente Feuer, Luft, Wasser, Erde in ihren kleinsten Teilen die Form von Tetraedern, Oktaedern, Ikosaedern und Hexaedern haben, so heißen die regelmäßigen Körper auch kosmische oder platonische Körper.

Mit Hippokrates von Chios, der die ersten Elemente der Geometrie verfaßte, erscheint die Planimetrie so ziemlich abgeschlossen. Nachdem die elementaren Sätze über die Lagen- und Größenbeziehungen der ebenen Figuren entwickelt waren, suchte man sie auf den Kreis und die Gebilde des Raumes auszudehnen und stieß dabei besonders auf drei naheliegende Probleme, die bei

scheinbarer Einfachheit unüberwindliche Schwierigkeiten darboten und daher für lange Zeit das allgemeine Interesse auch über die Fachkreise hinaus in Anspruch nahmen, die Quadratur des Kreises, die Dreiteilung des Winkels und die Verdoppelung des Würfels. Plato hatte die bis heute allgemein geltende Feststellung getroffen, daß zu den geometrischen Konstruktionen nur der Gebrauch von Lineal und Zirkel gestattet sei. Wenn sich nun auch in diesem Sinne alle drei Probleme als unlösbar erwiesen, so ist doch die Beschäftigung mit denselben die reiche Quelle neuer Erkenntnisse geworden.

Wie erwähnt, begegnen wir schon im Handbuche des Ahmes einem Näherungswerte für das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser, ebenso bei den Babyloniern. Doch sind wir über ihren Ursprung nicht minder im Dunkel wie über die Quadratur, die Anaxagoras im Kerker konstruiert haben soll. Erst über die geistreichen Quadraturen halbmondförmiger Figuren, durch die Hippokrates von Chios den Weg zu bahnen suchte, besitzen wir sichere Kunde. Den richtigen Weg, der die Berechnung mit beliebiger Annäherung ermöglichte, betraten Antiphon und Bryson, indem sie den Flächeninhalt durch ein- und umgeschriebene Vielecke von immer wachsender Seitenzahl zu erschöpfen (exhaurire) suchten.

Auf diesem Wege fand später Archimedes $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Die genauere Berechnung und die Frage nach dem eigentlichen Charakter der Zahl π beschäftigten alle folgenden Zeiten. Erst 1882 fand das viertausendjährige Problem seine Erledigung durch den von F. Lindemann erbrachten Nachweis, daß π nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein könne, womit zugleich erwiesen ist, daß die Quadratur des Zirkels konstruktiv unausführbar ist unter alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal.

An die Halbierung des Winkels schließt sich naturgemäß das Problem seiner Dreiteilung. Dieses Problem führte zur Erfindung der ersten von der Kreislinie verschiedenen, nach Entstehung und Eigenschaften bestimmt definierten krummen Linie durch Hippias von Elis (420 v. Chr.). Sie ist der geometrische Ort der Schnittpunkte zweier anstoßenden Quadratseiten AB, BC, deren eine (AB) sich um ihren Endpunkt A mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht und den Quadranten BAD beschreibt, während sich die andere (BC) in derselben Zeit ebenfalls gleichförmig, parallel zu sich selbst nach AD bewegt. Diese Kurve wurde später von Dinostratus (Ende des 4. Jahrh. v. Chr.) auch zur Quadratur des Kreises verwendet und erhielt daher den Namen Quadratrix (*τετραγωνίζουσα*). Sie veranschaulicht deutlich das Wachstum dessen, was wir jetzt Kreisfunktionen nennen. Die endgültige Lösung der Kreisteilungsgleichung, zu der die Trisektion führt, verdanken wir Gauß, der den Nachweis lieferte, daß durch eine endliche Anzahl von Operationen mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges n-Eck nur dann konstruiert werden kann, wenn $n - 1 = 2^p$ ist, wobei n eine Primzahl und $p = 2^k$ ist.

Wie die Probleme der Flächenanlegung die geometrische Form für die quadratischen Gleichungen sind, so ist die Frage nach der Verdoppelung oder überhaupt nach der Multiplikation des Würfels die stereometrische Form für die reine kubische Gleichung. Als man sah, mit welchem Erfolge Operationen mit ebenen Figuren auf die Lösung der Aufgaben angewendet werden konnten, die wir in Form quadratischer Gleichungen darstellen, lag es nahe, ähnliches mit Würfeln und Parallelepipeden zu versuchen. Hippokrates führte das Problem zu-

rück auf die Auffindung zweier mittlerer Proportionalen $a : x = x : y = y : 2a$, woraus sich ergibt $x = a\sqrt[3]{2}$.

Der Ursprung des Problems ist vom geheimnisvollen Schleier der Sage umwoben. Die Delier, von zahlreichen Unglücksfällen betroffen, wandten sich um Abhilfe an das Orakel in Delphi und erhielten den Auftrag, ihren würfelförmigen Altar zu verdoppeln. Da ihnen die Erfüllung dieses Befehles nicht gelang, wandten sie sich an Plato, der seine Schüler beauftragte, sich mit dem Studium des Problems zu beschäftigen.

Unter den älteren Lösungen dieser Aufgabe ist die rein stereometrische des Archytas hervorzuheben, bei der die erste Kurve doppelter Krümmung, die Durchdringungskurve eines Zylinders und eines Kegels, auftritt. Als reifste Frucht aber verdanken wir dem Delischen Problem die Entdeckung der Kegelschnittslinien durch Menächmus, einen Schüler Platos (Mitte des 4. Jahrh.). Aus $a : x = x : y = y : b$ ergibt sich $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, daher erhält man die zwei mittleren Proportionalen als Koordinaten des Schnittpunktes zweier Parabeln; andererseits ist auch $xy = ab$, daher auch Parabel und Hyperbel zur Lösung der Aufgabe dienten. Menächmus schnitt die Kegelfläche durch eine zu einer Seitenlinie normale Ebene. Je nachdem nun der Winkel an der Spitze des Achsenschnittes ein spitzer, rechter oder stumpfer war, erhielt er den Schnitt des spitzwinkligen Kegels (Ellipse), des rechtwinkligen Kegels (Parabel) und des stumpfwinkligen Kegels (Hyperbel).

Aufgaben, die mittels Zirkel und Lineal nicht lösbar sind, wurden von den Griechen häufig auf eine Einschiebung zurückgeführt. Als Beispiel diene die Dreiteilung des Winkels AOC (Fig. 1). Man ziehe den Durchmesser AB und durch C eine Sekante, die den Kreis in E und den Durchmesser in D schneidet, derart, daß $ED = r$, dem Radius des Kreises, wird. Dann ist arc $BE = \frac{1}{3}$ arc AC. Zieht man $AF \parallel CD$, ferner

die Radien OE und OF, so sieht man: $\sphericalangle BOE = \frac{1}{3} FOE = \frac{1}{3} AOC$. Die Konstruktion der Einschiebung ist natürlich mit Zirkel und Lineal nicht möglich, ist aber für praktische Zwecke leicht ausführbar, indem man auf einem Streifen r aufträgt und denselben durch C gehen läßt, während ein End-

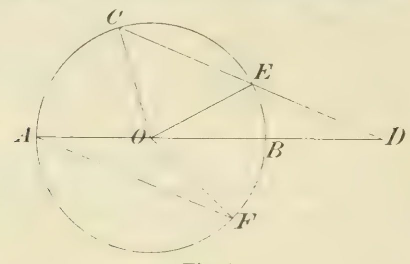


Fig. 1.

punkt D der Strecke r auf dem Durchmesser AB gleitet. Bei Bewegung des Streifens wird in einer gewissen Lage der andere Endpunkt von r auf den Kreis fallen und damit ist der Punkt E bestimmt. Es ist von Interesse, daß Viète (1593) diese Einschiebung seiner Lösung der Gleichungen 3. Grades im irreduziblen Falle zugrunde legte.

In Verbindung mit der Lehre vom Irrationalen sehen wir auch die ersten Infinitesimalbetrachtungen auftreten. Fragen über Stetigkeit und Unstetigkeit, unbegrenzte und begrenzte Teilbarkeit geometrischer Größen erregten den Streit der Philosophen. Am schärfsten treten uns die Schwierigkeiten, die der Unendlichkeitsbegriff darbietet, entgegen in den Sophismen des Eleaten Zeno. Die Mathematiker umgingen diese Schwierigkeiten durch die sogenannte Exhaustionsmethode, die von Eudoxus ihre wissenschaftliche Vollendung erhielt, der mittels dieses Verfahrens die schon von Demokrit gefundene Berechnung des Volumens der Pyramide und des Kegels streng bewies.

Das Schema dieser Methode ist folgendes. Es seien z. B. A und B zwei krummlinig begrenzte Flächen, die zu vergleichen sind. Zu diesem Zwecke sucht man für jede der zwei Flächen zwei Reihen von geradlinig begrenzten Flächen, (ein- und umgeschriebene Polygone), die eine bestehend aus Flächen, die kleiner, die andere aus Flächen, die größer sind als A, beziehungsweise B. Es sei also $C_m < A < D_n$ $E_m < B < F_n$ $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots.$ Die Reihen $C_1, C_2, \ldots$ sind ferner so gewählt, daß zu jeder Fläche E Werte $m\,n$ gehören derart, daß sowohl $D_n - C_m < E$ als auch $F_n - E_m < E$. Ist nun für zwei bestimmte Werte von $m\,n$ $D_n \leqq E_m$, beziehungsweise $F_n \leqq C_m$, so weiß man, daß $A < B$, beziehungsweise $A > B$. Ist aber, wie auch immer $m\,n$ gewählt werden, stets $D_n > E_m$ und $E_n > C_m$, so ist $A = B$. Angenommen nämlich, es sei $A > B$, so hat man $A - B < D_n - E_m$. Da bei passender Wahl von $m\,n$ $D_n < C_m + E$ und $E_m > F_n - E > C_m - E$, so folgt $A - B < 2\,E$, mithin wegen der Willkürlichkeit von E, $A \leqq B$. Auf ähnliche Weise ergibt sich $B \leqq A$, somit muß $A = B$ sein. — Es ist eine Eigentümlichkeit der alten Mathematiker, allgemeine Methoden nicht anzugeben, ja sogar zu verbergen. So finden wir auch den allgemeinen Charakter der Exhaustionsmethode nirgends angedeutet, sondern sie wird von Fall zu Fall in vollster Breite angewendet.

So entwickelte sich die Geometrie als Trägerin einer allgemeinen Größenlehre und es ist selbstverständlich, daß in den philosophischen Schulen eines Plato, Aristoteles, Eudoxus auch die Methodik und Philosophie dieser Wissenschaft nicht vernachlässigt wurden. Entsprechend den strengen Anforderungen der Dialektik entwickelte sich eine ausgebildete Terminologie, scharfe Begriffsbestimmungen, Unterscheidung zwischen analytischer und synthetischer Methode. Insbesondere wurde auch in der Akademie zuerst (durch Leon um 370) die Notwendigkeit des Diorismus hervorgehoben, d. h. der Untersuchung, ob und in welchen Fällen die Lösung einer Aufgabe überhaupt möglich sei. Dadurch war der

exakten Forschung der richtige Weg gewiesen und jede unberechtigte Verallgemeinerung ausgeschlossen.

Plato kannte noch keine eigentliche Wissenschaft der Mathematik. Das Wort *μαθήματα* umfaßte bei ihm noch alle wissenschaftlichen Lehrgegenstände. Erst bei den Peripatetikern bekam das allgemeine Wort die besondere Bedeutung, die es fortan beibehielt, und umfaßte Logistik (Rechenkunst) und Arithmetik, Planimetrie und Stereometrie, Musik und Astronomie.

b) Blüteperiode.

Nachdem die Mathematik durch die emsige Arbeit dreier Jahrhunderte nach ihren verschiedenen Richtungen entwickelt und ausgebildet und den strengen Anforderungen der Dialektik gemäß in ihren Grundlagen gefestigt worden war, gelangte sie im 3. Jahrh. v. Chr. durch den Genius der drei größten Mathematiker des Altertums, Euklid, Archimedes und Apollonius, zur Blüte.

Euklid von Alexandria (um 300 v. Chr.) hatte seine Bildung in Athen erhalten bei den Schülern des Plato und Eudoxus, Archimedes und Apollonius hinwieder lernten in der euklidischen Schule. Die mit Euklid so glücklich inaugurierte alexandrinische Schule blieb durch neun Jahrhunderte, von Ptolemäus Soter bis zur arabischen Okkupation Ägyptens, maßgebend nicht nur für die griechischen Länder, sondern auch für fremde Gegenden, besonders Indien. Archimedes und Apollonius gehörten ihr zwar nicht an, standen aber mit ihr in regem Verkehre.

Das Hauptwerk Euklids sind die Elemente (*στοιχεῖα*) in dreizehn Büchern. Es bringt auf Grund weniger hinreichender Voraussetzungen die Geometrie und in geometrischem Gewande auch die Arithmetik als ein zusammenhängendes Ganzes zur Darstellung. Die

Hauptsache war die Anordnung der Sätze, so daß jeder folgende lediglich durch vorangehende beweisbar wurde. Obwohl der Verfasser dabei nur das rein dialektische Interesse im Auge hatte, ohne praktische oder pädagogische Ziele zu verfolgen, so ergab sich doch von selbst der große Vorteil, daß man sich bei weiteren Entwicklungen auf sein Werk berufen und stützen konnte. Proklus von Byzanz, ein Kommentator Euklids im 5. Jahrh. n. Chr., sagt: „Euklid ordnete vieles von Eudoxus Herrührende zu einem Ganzen, führte vieles von Theätet Begonnene zu Ende und stützte das von den Vorgängern nur leichthin Bewiesene auf unwiderlegliche Beweise." Was die Form der Darstellung anbelangt mit den berühmten Schlußformeln „was zu beweisen war (*ὅπερ ἔδει ἀποδεῖξαι*)" und „was zu konstruieren war (*ὅπερ ἔδει ποιῆσαι*)", so läßt sich die Anknüpfung an altägyptische Vorbilder nicht verkennen. Schon früher waren Elemente geschrieben worden, sie gingen aber bald verloren, da Euklids Meisterwerk alle überflügelte.

An der Spitze des Werkes stehen die Definitionen (*ὅροι*), Forderungen (*αἰτήματα*) und Grundsätze oder Axiome (*κοιναὶ ἔννοιαι*). Das erste Buch enthält die Eigenschaften und die Kongruenz der Dreiecke, die Lehre von den Parallelen, Parallelogrammen und von der Flächengleichheit. Den Schluß bildet der pythagoreische Lehrsatz. Im Anschlusse daran lehrt das zweite Buch ein Quadrat als Summe oder Differenz von Quadraten und Rechtecken in der verschiedensten Weise zusammenzusetzen, schließlich jede geradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln. Demnach hat dieses Buch auch eine arithmetische Bedeutung. Es lehrt nämlich die Multiplikation von Polynomien, wobei nach griechischem Brauche Strecken die Stelle unserer allgemeinen

Zahlen vertreten, ferner die Auflösung der Gleichung $x^2 + ax = a^2$, von der natürlich nur die positive Wurzel anerkannt wird. Das dritte Buch behandelt den Kreis, das vierte Buch die dem Kreise ein- und umgeschriebenen Vielecke, besonders die regelmäßigen, darunter auch das Fünfeck. Der wesentliche Inhalt dieser vier Bücher, welche die Gleichheit von Strecken und Flächen nach allen Richtungen behandeln, stammt bereits aus der vorplatonischen Zeit.

Nunmehr kommt die Ungleichheit in Betracht, soweit sie meßbar ist, und zwar ist diese Messung eine zweifache, eine geometrische und arithmetische, und beruht auf der Lehre von den Proportionen, die im fünften Buche behandelt wird. Um die Schwierigkeit zu entgehen, Kommensurables und Inkommensurables zu trennen, werden nur Streckenverhältnisse behandelt. Dieses Buch stammt von Eudoxus. Wir finden darin das erste Beispiel für das Schaffen eines abstrakten Größensystems in der Weise, die man im 19. Jahrh. wieder erfunden hat. Der für kommensurable Strecken definierte Begriff des Verhältnisses wird auf inkommensurable Strecken ausgedehnt nach dem Grundsatze der Permanenz der Gesetze. Das Ansehen Euklids war so groß, daß man noch im 17. Jahrh. an den Verhältnissen und Proportionen festhielt, obwohl sie seit Einführung der Irrationalzahlen überflüssig geworden waren.

Das sechste Buch handelt von der Ähnlichkeit der ebenen Figuren. Hier finden wir die erste Maximumaufgabe. Dieselbe besagt nach unserer Schreibweise, $x(a - x)$ werde ein Maximum für $x = \frac{a}{2}$. Auch die Lösung der Gleichungen $x(a - x) = b^2$ und $x(a + x) = b^2$ wird durch Flächenanlegung ausgeführt. Dieses Buch

stammt aus der Schule der **Pythagoreer**. Ebenso das 7., 8. und 9. Buch, die Zahlentheorie, d. h. Eigenschaften der ganzen Zahlen als solcher behandeln. Wir finden hier die Sätze über gemeinsames Maß und Vielfaches, Zahlenproportionen, Primzahlen, aber auch Beiträge zur praktischen Arithmetik, z. B. die Kettendivision, die Summierung der geometrischen Reihe.

Das 10. Buch, zum Teile auf **Theätet** fußend, enthält die Lehre vom Irrationalen. Es bringt die allgemeine Theorie von Ausdrücken der Form $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ und ist ein unvergängliches Denkmal griechischen Scharfsinnes.

Das 11. Buch behandelt die Lage von Geraden und Ebenen im Raume, das 12. Buch enthält die Sätze über das Volumen des Prisma, der Pyramide, des Zylinders, des Kegels und der Kugel, aber nirgends eine wirkliche Berechnung, das 13. Buch endlich handelt über die der Kugel eingeschriebenen Körper und schließt mit dem Satze, daß es nur fünf regelmäßige Körper gibt.

Das Ansehen und die Bewunderung, die dieses klassische Meisterwerk als Muster strengster Konsequenz und exaktester Durchführung verdient, haben sich trotz mancher Gegner, die ihm zu keiner Zeit fehlten (z. B. die Cyniker, Petrus Ramus, Schopenhauer), ungeschwächt erhalten und kein Buch, die Bibel ausgenommen, erlebte so viele Ausgaben und Übersetzungen, sowie auch kein anderes mathematisches Werk einen solchen Einfluß auf das Geistesleben der Menschheit ausübte.

Besondere Hervorhebung verdient die 5. Forderung (nach anderer Zählung das 11. Axiom), die verlangt, daß man zugebe, daß zwei Gerade sich auf der Seite schneiden, auf der die Summe der inneren Anwinkel kleiner als 2 R ist. Gegen diese Forderung erhob man zu allen Zeiten Bedenken und suchte sie durch einen beweisbaren Satz zu beseitigen, bis man endlich im 19. Jahrh. erkannte, daß ein Beweis nicht möglich sei, denn die Euklidische Raumform sei eine zufällige und die

nicht euklidischen Geometrien, die auf diese Forderung verzichten, seien logisch gleichberechtigt. Nicht auf dem Wege der Spekulation über die Euklidischen Forderungen, sondern auf dem praktischen Wege der Verallgemeinerung der Euklidischen Geometrie gelangte die moderne projektivische Geometrie, deren Begründer Desargues (1639) ist, zu gleichem Ergebnisse, indem sie durch Einführung des uneigentlichen Punktes den Unterschied zwischen schneidenden und nichtschneidenden Geraden aufhob. Da bei Projektion eigentliche und uneigentliche Punkte ineinander übergehen, so wurden die bei beliebigen Projektionen bleibenden projektivischen Eigenschaften als unabhängig vom Parallelenaxiom erkannt. Zu gleichem Resultate kam auch die Geometrie der Lage.

Die meisten Ausgaben der Elemente enthalten 15 Bücher. Das 14. ist eine tüchtige Arbeit des Hypsikles (um 150 v. Ch. in Alexandria) über die regelmäßigen Körper, das 15. eine unbedeutende Leistung aus dem 6. Jahrh. n. Chr.

An die Elemente schließt sich eine andere Schrift Euklids an, die Daten (*δεδόμενα*), in denen gezeigt wird, daß, wenn gewisse Dinge gegeben sind, andere mitgegeben sind; z. B. wenn die Winkel eines Dreieckes der Größe nach gegeben sind, so ist das Dreieck der Art nach gegeben. Der Inhalt geht über die Elemente nicht hinaus, wenn auch nicht alles dort enthalten ist. Hier finden wir auch die geometrische Lösung des Gleichungssystems $xy = b^2$, $x \mp y = a$, also der Gleichung $x^2 \mp b^2 = ax$. Bezugnehmend auf die im 6. Buche der Elemente behandelten Aufgaben können wir also sagen, daß hier auch noch der letzte Fall der quadratischen Gleichung $x^2 + b^2 = ax$ behandelt ist. Somit war Euklid imstande, jede quadratische Gleichung, die überhaupt reelle Wurzeln hat, aufzulösen, und es ist höchst wahrscheinlich, daß diese Aufgaben für ihn nicht bloß zusammenhangslose geometrische Probleme waren, sondern daß er das volle Bewußtsein dieses algebraischen Zusammenhanges besaß, denn nur so läßt sich

die Entstehung des 10. Buches der Elemente erklären.

Den Daten der Form nach verwandt, dem Inhalte nach aber viel bedeutsamer sind die Porismen, von denen jedoch nur einzelne Proben erhalten sind. Stellen die Daten Übungsaufgaben zur Auffrischung der Elemente dar, so sind die Porismen Anwendungen derselben von selbständigem Werte. Als Beispiel für ein einfaches Porisma diene folgendes: An den Satz: „Wenn ein Kreis gegeben ist, ist auch sein Mittelpunkt gegeben" knüpft sich mit Notwendigkeit die Aufgabe, die Konstruktion zu finden, durch die man den Mittelpunkt wirklich erhält. Von besonderem Interesse sind mehrere Sätze über Transversalen und Punktreihen, welche die Grundlage für die metrische Behandlung der projektivischen Geometrie abgeben, z. B.: Schneiden die Seiten eines vollständigen Vierseits sich in 6 Punkten, von denen drei in einer Geraden liegende gegeben sind, und sind von den übrigen Punkten zwei der Bedingung unterworfen, je auf einer Geraden zu bleiben, so wird auch der letzte Punkt eine Gerade zum geometrischen Orte haben, die aus den vorhandenen Angaben bestimmt werden kann. Durch die Behandlung derartiger Ortsprobleme schließen sich die Porismen dem Inhalte nach an eine andere verlorene Schrift Euklids an: „Über Oberflächenörter", vermutlich über Kurven auf Zylinder- und Kegelflächen. Verloren sind ferner die vier Bücher über Kegelschnitte. Dagegen hat sich eine Abhandlung über Teilung der Figuren größtenteils erhalten. Schließlich sei noch erwähnt, daß eine astronomische Schrift Euklids, betitelt „Phaenomena", eine Sphärik enthält, d. h. stereometrische Sätze über die Kugel, von denen allerdings manche sich schon kurz vor Euklid bei dem Astronomen Autolykus von Pitane finden.

Archimedes von Syrakus (287—212) ist der größte Mathematiker des Altertums. In der „Kreismessung" findet er $3\frac{10}{70} > \pi > 3\frac{10}{71}$. In der Abhandlung „über die Schneckenlinien" haben wir die ganze Theorie der transzendenten Archimedischen Spirale $\varrho = \varkappa\varphi$. (Ein Punkt A schreitet auf einer Geraden mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, während sich die Gerade um den Anfangspunkt A mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht.) Ferner besitzen wir von Archimedes eine „Quadratur der Parabel", eine Schrift, betitelt „Über Kugel und Zylinder". In letzterer berechnet er Oberfläche und Volumen der Kugel durch Vergleichen mit dem umgeschriebenen Zylinder. Ein anderes stereometrisches Werk ist „Über Konoide und Sphäroide". Darin behandelt Archimedes die durch Umdrehung eines Kegelschnittes um eine seiner Hauptachsen entstehenden Körper, die rechtwinkligen Konoide (Umdrehungs-Paraboloide), die stumpfwinkligen Konoide (einmantelige Umdrehungs-Hyperboloide), längliche und breite Sphäroide (Umdrehungs-Ellipsoide um die große und kleine Achse): er bestimmt die ebenen Schnitte und das Volumen von Abschnitten dieser Körper. (Hier finden wir auch die Quadratur der Ellipse.)

In allen diesen Untersuchungen bewundern wir die mit höchstem Geschicke angewendete Exhaustionsmethode. Nicht selten treten konvergente unendliche Reihen auf, z. B. in der Quadratur der Parabel die Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots = 1\frac{1}{3}$. Überhaupt weiß Archimedes Ausdrücke auszuwerten, die uns unter den Formen $\int\limits_0^c x\,dx = \frac{1}{2}c^2$, $\int\limits_0^c x^2\,dx = \frac{1}{3}c^3$ und ähnlichen geläufig sind.

Einen Einblick in die Methode (ἔφοδος) seiner Forschung gewährt Archimedes in einer Eratosthenes gewidmeten Schrift, die H. Heiberg 1906 in einer Konstantinopler Bibliothek entdeckte. Durch infinitesimale Zerlegung der Flächen in parallele Gerade, der Körper in parallele Ebenen bestimmt er ihren Schwerpunkt und vergleicht sie dann mittels des Gesetzes des zweiarmigen Hebels mit bekannten Flächen und Körpern. So findet er die Fläche eines Parabelsegmentes, das Volumen der Kugel, des Ellipsoids, der Segmente eines Paraboloids, einer Kugel, eines Hyperboloids; schließlich berechnet er einen Zylinderhuf und den Raum, der von zwei Zylinderflächen umschlossen wird, die einem Würfel so eingeschrieben sind, daß sie sich kreuzen. Die so hergeleiteten Sätze bedürfen aber, wie Archimedes hervorhebt, zur wissenschaftlichen Darstellung noch des Exhaustionsbeweises, der den Weg, der zur Entdeckung führte, vollständig verhüllt.

In der Schrift „Über Kugel und Zylinder“ kommt die Aufgabe vor, eine Kugel durch eine Ebene derart zu schneiden, daß die Volumina der beiden Kugelabschnitte in gegebenem Verhältnisse stehen. Die sich ergebende Gleichung $x^3 - a x^2 + b^2 c = o$ hat Archimedes auf die Bedingungen ihrer Lösbarkeit geprüft und mit größter Wahrscheinlichkeit auch gelöst.

Vielleicht beschäftigte sich Archimedes auch schon mit der sogenannten Pellschen Gleichung $x^2 - a y^2 = 1$. Wenigstens führt das Rinderproblem, das die Berechnung einer Anzahl von Rindern, die Sizilien enthält, aus einigen sehr komplizierten Angaben fordert, zur Gleichung $x^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353\, y^2 = 1$, die in ganzen Zahlen zu lösen ist. Sollte auch die Aufgabe nicht von Archimedes stammen, so ist doch nicht zu zweifeln, daß er sie hätte lösen können.

In den Werken des Archimedes treffen wir zum ersten Male Ergebnisse praktischen Rechnens. Die Ausbildung der Mathematik in den idealistischen Schulen der Pythagoreer und Platoniker erklärt die ängstliche Sorgfalt, mit der die besondere Arithmetik, die Logistik, von der Arithmetik (Zahlentheorie und Algebra) getrennt wurde, ebenso, ja in noch höherem Grade, als man die Geodäsie von der Geometrie schied. Daher blieb das Zahlenrechnen der Griechen hinter ihren sonstigen mathematischen Leistungen zurück. Nicht als ob Logistik und Geodäsie gering geachtet worden wären, aber sie entbehrten des wissenschaftlichen Charakters.

Das älteste griechische Rechnen bediente sich wie das ägyptische der Finger und des Rechenbrettes. Durch gewisse Fingerstellungen wurden Zahlen festgehalten, um das Gedächtnis zu unterstützen. Auf dem Rechenbrette (Abakus, Staubbrett) wurde mit Steinen oder verschiebbaren Knöpfen operiert, die in verschiedenen Reihen verschiedenen Stellungswert besaßen. Das Rechnen auf dem Papiere kam erst in der alexandrinischen Zeit mehr in Übung. Addition und Subtraktion fanden in der auch bei uns üblichen Weise statt. Die Multiplikation wurde, entsprechend der griechischen Zahlenschreibung, so ausgeführt, daß jedes Glied des einen Polynoms mit jedem Gliede des anderen multipliziert wurde. Über die Methode der Division sind wir nicht genügend unterrichtet. Was das Wurzelausziehen anbelangt, so kamen höhere als dritte Wurzeln jedenfalls nur ausnahmsweise in Betracht. Häufig wurde die Wurzel durch Probieren oder geometrische Konstruktion gefunden. Doch waren Archimedes und auch spätere Mathematiker im Besitze eigener Algorithmen des Wurzelausziehens mit guter Annäherung. Aber es ist bisher

nicht vollständig gelungen, ihre Verfahrungsweise aufzudecken.

Zur praktischen Arithmetik können wir auch eine Vertiefung des dekadischen Zahlensystems rechnen, die Archimedes in der „Sandrechnung“ lieferte. Es soll nämlich eine Zahl angegeben werden, größer als die Anzahl der Sandkörner, die eine Kugel enthält, deren Radius gleich der Entfernung des Erdmittelpunktes vom Fixsternhimmel ist. Archimedes faßt zu diesem Zwecke je acht aufeinanderfolgende Rangstufen in eine Oktade zusammen. Die Einheit der 2. Oktade ist also 100 000 000, die der dritten Eins mit 16 Nullen usw. 100 Millionen solcher Oktaden bilden die erste Periode usw. Auch Apollonius gab eine Darstellung der ins Unbegrenzte wachsenden Zahlen, und man sieht in diesen Versuchen mit Recht die arithmetische Ergänzung der Exhaustionsmethode. Dem Unendlichkleinen nahezu zusammenfallender Raumgebilde wird das Unendlichgroße der alle Grenzen übersteigenden Zahl entgegengesetzt; um beide dreht sich die ganze Infinitesimalrechnung.

Das Hauptwerk des Apollonius von Perga (zwischen 250 und 200 in Alexandria, später in Pergamum), des „großen Geometers“, sind die acht Bücher Kegelschnitte (*κωνικά*). In diesem Werke ist alles von älteren Schriftstellern, von Menächmus, Aristäus (um 320), Euklid u. a. Herrührende mit einer Fülle eigener Entdeckungen zu einem Ganzen verarbeitet. Apollonius erkannte, daß die Kurven, zu denen man durch Umkehrung der schon wiederholt erwähnten Flächenanlegungen (der Parabole, Hyperbole und Elleipsis) gelangt, mit den Kegelschnittslinien identisch sind, d. h. er kannte jene Eigenschaften dieser Kurven, die wir heute aus deren Scheitelgleichungen herauszulesen gewohnt

sind. Es tritt uns in seiner Behandlung ein Parallelkoordinatensystem entgegen, bestehend aus einem beliebigen Durchmesser mit der Schar der parallelen Sehnen, die von ihm halbiert werden. Diese parallelen Sehnen heißen *τεταγμένως κατηγμέναι* (ordinate applicatae) und die Abschnitte des Durchmessers *ἀποτεμνομέναι* (abscissae), welche Ausdrücke sich in der analytischen Geometrie erhalten haben. Doch sind diese Koordinaten untrennbar von der betreffenden Figur und keineswegs allgemeine Hilfslinien.

Das 1. Buch behandelt die allgemeinen Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung, das 2. Buch die Asymptoten der Hyperbel, dann die Durchmesser und Tangenten der Kegelschnitte überhaupt, das 3. Buch die Sekanten und Brennpunkte. Hier kommt auch die Erzeugung eines Kegelschnittes durch zwei solche Strahlenbüschel vor, die wir jetzt als projektivische bezeichnen. Das 4. Buch behandelt die Durchdringungen und Berührungen zweier Kegelschnitte. Das 5. Buch ist das bedeutendste. Es enthält die Aufgabe, wie und wie viele Normale von einem gegebenen Punkte aus an einen Kegelschnitt gezogen werden können, unsere moderne Theorie des Krümmungsmittelpunktes und der Evoluten. Das 6. Buch handelt über gleiche und ähnliche Kegelschnitte, das 7. Buch über Komplementarsehnen und konjugierte Durchmesser. Das 8., verloren gegangene Buch scheint bestimmte Aufgaben enthalten zu haben.

Man nannte die Kegelschnittslinien körperliche Örter im Gegensatze zu den ebenen Örtern (Kreis und Gerade), alle anderen Kurven hießen lineare Örter, sowie man auch die Aufgaben in ebene, körperliche und lineare einteilte.

Viele andere Schriften des Apollonius sind verloren gegangen; erhalten sind nur zwei Bücher über den

Verhältnisschnitt. Es sind auf zwei festen Geraden zwei feste Punkte A und B gegeben. Es soll nun durch einen gegebenen Punkt außerhalb dieser Geraden eine Gerade gezogen werden, die die beiden gegebenen in Punkten C und D schneidet, so daß $AC : BD$ einen bestimmten Wert hat.

In der Schrift „Über Berührungen" war die bekannte „Berührungsaufgabe des Apollonius" enthalten, d. h. die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen, der drei Bedingungen genüge, deren jede darin bestehen kann, durch einen gegebenen Punkt zu gehen oder einen gegebenen Kreis zu berühren.

In die Zeit der großen Mathematiker fällt auch die Wirksamkeit des berühmten Gelehrten Eratosthenes (276—194), der auf mathematischem Gebiete bekannt ist durch seine Siebmethode, die durch zwei Jahrtausende das einzige Verfahren blieb, um die Primzahlen nacheinander aufzufinden. Er erfand auch einen sinnreichen Apparat zur Darstellung zweier mittlerer Proportionalen. Um die Größe der bewohnten Erdfeste zu berechnen, zerlegte er sie in Teilflächen (σφραγίδες), deren lineare und quadratische Abmessungen er zu ermitteln suchte.

c) Nachklassische Periode.

Nach Ablauf des 3. Jahrh. v. Chr. hatte die griechische Mathematik ihren Höhepunkt überschritten, und wenn es auch in der Folgezeit keineswegs an bedeutenden Mathematikern fehlte, so mangelte doch die Universalität, die die klassische Periode auszeichnete, und die Fortschritte bezogen sich mehr auf Spezialgebiete. Insbesondere im Anschlusse an die aufstrebende Astronomie gelangte die arithmetische Seite unserer Wissenschaft, die in der klassischen Zeit wenig Beachtung gefunden hatte, zu immer größerer Ausbildung, erwuchs die Trigonometrie zu einer selbständigen Disziplin und machte

die Geometrie der Kugel bedeutende Fortschritte. Die eigentliche und keineswegs unwürdige Fortsetzung der klassischen Geometrie aber bildet die Theorie der höheren Kurven, die nach dem Beispiele des Archimedes eifrig gepflegt wurde.

Höchstwahrscheinlich fällt in das 2. Jahrh. v. Chr. die Lebenszeit zweier Mathematiker, die zur Lösung des delischen Problems und der Trisektion eigene Kurven ersannen, Nikomedes und Diokles. Ersterem verdanken wir die Konchoide (Muschellinie), letzterem die Zissoide (Efeulinie). Die Konchoide ist der geometrische Ort der Endpunkte aller gleichen Strecken, die von den Schnittpunkten eines ebenen Strahlenbüschels mit einer Transversalen auf den einzelnen Strahlen abgetragen werden.

Die Gleichung dieser Kurve ist $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2 x^2$. Ist die Leitlinie ein Kreis und der Pol innerhalb desselben, so erhält man die Kreiskonchoide, die Roberval (1602—1675) „limaçon de Pascal" nannte. Ist die Leitlinie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, so entstehen elliptische, parabolische und hyperbolische Konchoiden. Da Nikomedes auch einen Apparat erfand, die Konchoide in einem Zuge zu konstruieren, so ist sie nach dem Kreis und der Geraden die älteste Linie, von deren mechanischer Konstruktion wir unterrichtet sind.

Die Gleichung der Zissoide ist $(x^2 + y^2)x - a y^2 = o$; sie ist noch heute ein beliebtes Beispiel der Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.

Ein dritter derselben Zeit angehöriger Geometer ist Perseus, der Erfinder der spirischen Linien. Eine Spire (Wulst) ist ein ringförmiger Rotationskörper, der dadurch entsteht, daß ein Kreis vom Radius r um eine in seiner Ebene liegende Achse rotiert. Man hat drei Fälle, je nachdem der Abstand der Achse vom Mittelpunkt $e \lesseqgtr r$. Durch Schnitte parallel zur Achse erhält man die spirischen Linien.

Die schleifenförmige Spire hieß Hippopede (Pferdefessel). Xenophon beschreibt sie als diejenige Art des Laufes, die beide Seiten des Pferdes gleichmäßig ausbilde (Achterreiten). Sie ist wahrscheinlich identisch mit unserer Lemniskate.

Im 1. Jahrh. v. Chr. verfaßte Geminus von Rhodus eine „Theorie der Mathematik", aus der aber nur einige wertvolle Zitate erhalten sind. Der Zeit nach Christus gehört Serenus von Antissa an, der die Identität der aus dem Kegel und dem Zylinder geschnittenen Ellipse zeigte und sich dabei der Eigenschaft eines harmonischen Strahlenbüschels im Raume bediente.

Ein Mathematiker von hervorragender Bedeutung war Heron von Alexandria (wahrscheinlich um 100 v. Chr.), der Vertreter der praktischen technischen Geometrie. Die zahlreichen unter seinem Namen erhaltenen geometrischen Abhandlungen verschiedenartigen Inhalts bildeten wahrscheinlich ursprünglich die Teile eines großen geodätischen Werkes, dessen Zweck war, die aus altägyptischer Tradition stammenden mangelhaften Vorschriften zu verdrängen und durch genauere, aber noch immer für das praktische Rechnen bequeme Regeln zu ersetzen. Dieses große Werk zerfiel dann vermutlich unter den Händen späterer Bearbeiter in einzelne Abhandlungen, Geometrie, Geodäsie, Stereometrie, Ausmessungen, Buch des Landbaues, über die Dioptra (ein feldmesserisches Instrument, der Keim unseres Theodoliten). In der letzteren Schrift finden wir die mit hoher Eleganz gegebene Ableitung der Heronschen Formel zur Berechnung der Dreiecksfläche aus den drei Seiten.

Da sich Heron niemals mit der theoretischen Entwicklung begnügt, sondern stets von der wissenschaftlichen Grundlage zur praktischen Anwendung fortschreitet, so darf es nicht wundernehmen, daß er auch der Vertreter einer entwickelten Rechenkunst bis zur

Ausziehung von Quadratwurzeln, der Vertreter einer eigentlichen Algebra bis zur Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen ist, soweit von einer solchen ohne Anwendung symbolischer Zeichen die Rede sein kann. Es ist für seinen Standpunkt kennzeichnend, daß er gelegentlich Kreisfläche, Peripherie und Durchmesser, also eine Fläche und zwei Längen zu einer Summe vereinigt. Das ist nur denkbar, wenn er dabei auf ganz algebraischem Boden stand. Von Heron steht es auch fest, daß er die quadratische Gleichung als Rechenaufgabe betrachtete, wenn man schon diese Kenntnis Euklid und Archimedes nicht zugestehen sollte.

Seit dem Alexanderzuge waren die Griechen näher mit der chaldäischen Astronomie bekannt geworden. Die Teilung des Kreises in 360° treffen wir zuerst bei Hypsikles (etwa 180 v. Chr.), und von nun an kam in der sphärischen Geometrie und Trigonometrie ausschließlich das Sexagesimalsystem zur Anwendung. Als den eigentlichen Erfinder der Sehnenrechnung und der sphärischen Trigonometrie haben wir Hipparch zu nennen, der zwischen 161 und 146 v. Chr. astronomische Beobachtungen anstellte. Die Kugelgeometrie bereicherte er durch die stereographische Projektion, indem er die Himmelskugel von einem Pol aus auf ihre Äquatorebene abbildete.

Der Begründer der Goniometrie ist Heron, der $\frac{n}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots, 12$ numerisch berechnete.

Um die Mitte des 1. Jahrh. v. Chr. verfaßte Theodosius ein Lehrbuch der Sphärik in engem Anschlusse an Autolykus und Euklid. Weit bedeutender ist das gleichnamige Werk des Menelaus von Alexandria (um 98 n. Chr.), eine Art sphärischer Trigonometrie. Hier

finden wir die Kongruenzsätze für sphärische und ebene Dreiecke und die Sätze über Transversalen im Dreiecke, die man jetzt als „Sätze des Menelaus“ zu bezeichnen pflegt. (Satz von den 6 Größen, regula sex quantitatum.) Seine 6 Bücher der Sehnenberechnung sind zwar verloren gegangen, hatten aber großen Einfluß auf Klaudius Ptolemäus (um 140 n. Chr.), der das vollendete, was Hipparch und Menelaus begonnen hatten. Er schuf für den astronomischen Gebrauch eine Trigonometrie von so vollendeter Form, daß sie weit über ein Jahrtausend nicht überboten wurde. Sie findet sich vereinigt mit seinem astronomischen Lehrgebäude in den 13 Büchern der „Großen Zusammenstellung (*μεγάλη σύνταξις*)“, die gewöhnlich Almagest genannt wird.

Im 9. Kapitel des 1. Buches finden wir die griechische Goniometrie. Ptolemäus teilt den Durchmesser des Kreises in 120 gleiche Teile und setzt dann die Teilung sexagesimal fort.

Die erste Unterabteilung hieß in den lateinischen Übersetzungen partes minutae primae, die zweite partes minutae secundae. So entstanden die Bezeichnungen „Minuten“ und „Sekunden“.

Er gibt nun in der Sehnentafel für alle Winkel von $^1/_2{}^\circ$ zu $^1/_2{}^\circ$ bis 90° die zugehörigen Sehnen in Teilen des Durchmessers an, indem er zuerst höchst sinnreich und elegant die Sehne von $^1/_2{}^\circ$ berechnet, dann die leicht zu findenden Sehnen von 120°, 90°, 72°, 60°, 30° und schließlich mittels des nach ihm benannten ptolemäischen Lehrsatzes die übrigen Sehnen. Die ebene Trigonometrie findet übrigens keine systematische Behandlung, sondern nur insoweit sie in den Sehnentafeln und den damit zusammenhängenden Sätzen ein Hilfsmittel zu den in der Sphärik nötigen Berechnungen liefert. Dagegen enthält das 11. Kapitel des 1. Buches eine voll-

ständige Trigonometrie des rechtwinkligen Kugeldreiecks, für das mit Hilfe des Transversalensatzes von Menelaus folgende Gleichungen hergeleitet werden: $\cos c = \cos a \cdot \cos b$, $\sin a = \sin \alpha \cdot \sin c$, $\cos a \sin b \sin \alpha = \cos \alpha \sin a$, $\cos b \sin c \cos \alpha = \sin b \cos c$. Bemerkenswert ist, daß Ptolemäus für π eine bessere Annäherung kennt, als Archimedes, nämlich $\pi = 3 \cdot 8 \cdot 30$, d. h. $\pi = 3\frac{8}{60}\frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} = 3{,}141666\ldots$

Anknüpfend an alte Traditionen entwickelte um diese Zeit die Schule der Neupythagoreer eine rege arithmetisch-algebraische Tätigkeit. Besonders erwähnenswert ist des Nikomachus von Gerasa (um 100 n. Chr.) „Einleitung in die Arithmetik". Er bildet, kann man sagen, in diesem Werke besonders die arithmetische Seite des Euklid aus und hat daher mit einem gewissen Rechte den Namen des „Elementenschreibers der Arithmetik" erhalten. Er behandelt mehr die Zahlen für sich, ohne geometrische Vorstellung; namentlich gibt er auch eine geschickte und vollständige Theorie der Polygonalzahlen, deren allgemeine Definition übrigens schon Hypsikles kannte.

Derselben Schule gehörte Theon von Smyrna (um 130 n. Chr.) an, der in seinem mathematischen Werke das lehren wollte, was zum Studium Platos notwendig war. Von besonderem Interesse sind hier die ins Gebiet der unbestimmten Analytik gehörigen Rekursionsformeln für die Seiten- und Diametralzahlen $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$, die zur Annahme nötigen, die Griechen seien der Sache nach mit der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ bekannt gewesen.

Ihren Höhepunkt erreichte die griechische Arithmetik und Algebra mit Diophantus von Alexandria (um 250 n. Chr.), dessen Hauptwerk den Titel „Arithmetisches (Ἀριθμητικά)" führt. Man kann in der Ent-

wicklung der Algebra drei Stufen unterscheiden, die rhetorische, die synkopierte und die symbolische. Auf der ersten Stufe werden alle Rechnungen durch Worte ohne Benutzung von Zeichen dargestellt. Dagegen bedient sich die zweite Stufe schon abkürzender Bezeichnungen für häufig gebrauchte Ausdrücke, ohne sie jedoch dem Satzbau zu entziehen. Der bedeutendste und in der älteren Literatur einzige Vertreter dieser Stufe ist Diophant. Er hat Abkürzungen für die Potenzen der Unbekannten bis zur sechsten, für die Subtraktion, die Gleichheit usw.

Die von Diophant behandelten Aufgaben sind teils bestimmte, teils unbestimmte. Erstere betreffen Gleichungen des ersten und zweiten Grades und einen Spezialfall einer kubischen Gleichung. Diophant teilt aber die Gleichungen nicht nach ihrem Grade ein, sondern nach der Anzahl der Glieder. Durch äußerst geschickte Kunstgriffe weiß er meistens mit einer Unbekannten auszukommen.

Was die unbestimmte Analytik betrifft, so finden wir zwar schon bei den Pythagoreern, bei Archimedes, Heron, Theon von Smyrna vereinzelte Beispiele, aber Diophant überragt sie weit durch seine Meisterschaft und rein algebraische Behandlung. Dabei darf man jedoch durchaus keine allgemeinen Methoden erwarten, sondern jeder Einzelfall wird für sich behandelt, freilich ganz virtuos und entsprechend der Aufgabe. Es werden auch nicht etwa ganzzahlige Lösungen verlangt, sondern wie bei den bestimmten Gleichungen sind nur negative und irrationale Wurzeln, die ja dem Griechen keine Zahlen sind, ausgeschlossen.

Bei den verschiedenen künstlichen Wendungen, die zur Auflösung der Gleichungen zu machen sind, ergeben

sich manche schöne Sätze der Zahlentheorie, die dann später auf die großen Zahlentheoretiker des 17. Jahrh. von entscheidendem Einflusse waren; z. B. daß man $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ auf zwei Arten als Summe zweier Quadrate darstellen kann; daß jedes Quadrat auf beliebig viele Arten als Summe zweier Quadrate aufgefaßt werden kann. Eine kurze Theorie der Polygonalzahlen ist mehr im euklidischen Sinne gehalten. Die auf Diophant noch folgenden Arithmetiker, meist Neuplatoniker, sind von geringer Bedeutung.

Als Kommentatoren klassischer Werke nennen wir Proklus (410—485 n. Chr.), von dem ein Kommentar zum 1. Buche der Elemente, voll wertvoller geschichtlicher Aufschlüsse, erhalten ist, und Eutocius (geb. 480 n. Chr.), von dem wir Kommentare zu einigen Schriften des Archimedes und den ersten vier Büchern der Kegelschnitte des Apollonius besitzen.

Diese Kommentare überragt weit das Sammelwerk (συναγωγή) des Pappus von Alexandria (wahrscheinlich um 300 n. Chr.), dessen arithmetischer Teil leider größtenteils verloren ist. Der Verfasser schildert den Inhalt mathematischer Schriften, die zu seiner Zeit in Ansehen standen, nicht ohne eigene bedeutsame Zusätze, die seine Meisterschaft in solchen Untersuchungen bekunden, die wir heute als neuere Geometrie bezeichnen. Wir finden hier den Fundamentalsatz der Lehre vom Doppelverhältnisse, den Begriff des vollständigen Vierecks und Vierseits, die Lehre von der Involution von Punkten, von der Kreisberührung und Ähnlichkeit bei Kreisen (alle Verbindungslinien der Endpunkte direkt oder invers paralleler Radien zweier Kreise schneiden sich je in einem festen Punkte der Zentrallinie). Auch die sogenannte „Aufgabe des Pappus“, die Descartes

den ersten Anlaß zu seinen geometrischen Überlegungen gab, ist hier enthalten: Wenn mehrere Gerade einer Ebene gegeben sind, den Ort eines solchen Punktes zu finden, daß, wenn man von ihm Perpendikel oder allgemein Gerade unter gegebenen Winkeln nach den gegebenen Geraden zieht, das Produkt gewisser unter ihnen zu dem Produkt aller übrigen in einem konstanten Verhältnisse stehe; für drei Gerade $\frac{e_1 e_2}{a e_3} = k$, für vier $\frac{e_1 e_2}{e_3 e_4} = k$, für fünf $\frac{e_1 e_2 e_3}{a e_4 e_5} = k$ usw. Von den Griechen rührt die Lösung der ersten zwei Fälle her, die Kegelschnitte liefern. Pappus ersann neue Kurven doppelter Krümmung auf der Kugel und eine Serie neuer Erzeugungen der Quadratrix. Schließlich sei noch erwähnt, daß der seit dem 17. Jahrh. als Guldinsche Regel benannte Satz schon bei Pappus auftritt, daß das Volumen eines Umdrehungskörpers gleich ist dem Produkte aus der von der Meridiankurve umschlossenen Fläche und dem Wege, den der Schwerpunkt dieser Fläche während der Umdrehung durchläuft.

3. Römer.

Die Mathematik der Römer hatte einen durchaus praktischen Charakter nicht bloß in der alten Zeit, sondern auch dann, als sie die griechische Wissenschaft kennen lernten und allenthalben griechische Bildung aufnahmen.

Treffend charakterisiert Cicero die Stellung der Römer gegenüber der griechischen Mathematik: „In summo apud Graecos honore geometria fuit; itaque nihil mathematicis illustrius: at nos ratiocinandi metiendique utilitate huius artis terminavimus modum.“ (Tusc. I, 2.)

Sie besaßen daher keine selbständigen mathematischen Leistungen, im Gegenteile haben sie nicht selten griechisches Wissen unverstanden und entstellt überliefert. Gleichwohl waren sie zunächst die einzigen Lehrmeister des Abendlandes, und jahrhundertelang herrschten Regeln und Methoden, die aus römischen Quellen stammten.

Außer dem Rechnen an den Fingern und auf dem Abakus wurde auch das Kopfrechnen in den Schulen geübt, besonders Bruchrechnen, das sich insofern sehr mühselig gestaltete, als nur Zwölftel (Teile des As oder der Uncia) in Gebrauch waren, andere Brüche also nur annäherungsweise ausgedrückt werden konnten. Zur Erleichterung benutzte man Tabellen (calculi). Ziemlich komplizierte Aufgaben über Fragen des Erbrechtes, des Privatbesitzes und der Zinsenentschädigung beschäftigten die römischen Rechner.

Aufgabe der praktischen Geometrie war es, Bauten zu orientieren, Lager abzustecken, Stadtpläne zu entwerfen. Unter Augustus wurde eine Vermessung des Reiches vorgenommen, deren Oberleitung dem Vipsanius Agrippa zufiel, während Balbus mit der Detailausführung betraut wurde. Unter demselben Kaiser verfaßte Varro seine Enzyklopädie, in der auch Mathematisches vorkommt, und Vitruvius Pollio sein berühmtes Lehrbuch der Baukunst. Etwas später schrieb Columella über den Landbau; er war in der Feldmessung Schüler Herons von Alexandria. Aus der gleichen Quelle schöpften auch die Agrimensoren oder Gromatiker (so genannt nach der groma, einem feldmesserischen Instrumente), die auch einiges theoretisches Wissen zeigen: Frontinus, Hyginus, Balbus, Nipsus, Epaphroditus, Vitruvius Rufus. In rein

mathematischer Hinsicht ist hervorzuheben, daß Epaphroditus die independente Formel für die Polygonal- und Pyramidalzahlen kennt. In der späteren Kaiserzeit übersetzte Appuleius den Nikomachus. Mathematisches finden wir auch im Somnium Scipionis des Makrobius und in dem allegorischen Wissenschaftsroman (satira) des Marcianus Capella (5. Jahrh.).

Aus der Zeit der Gotenherrschaft sind zwei Schriftsteller zu nennen, deren Werke im Mittelalter großes Ansehen genossen, Boethius (480—524) und Cassiodorius (475—570). Boethius schrieb eine „Institutio arithmetica", die im wesentlichen eine Übersetzung der Arithmetik des Nikomachus ist, eine „Institutio musica" (Intervallenlehre) ebenfalls nach griechischen Quellen. Nach dem Zeugnisse Cassiodors übersetzte Boethius den Euklid ins Lateinische. Ob aber die zwei Bücher „Geometrie", die ihm in mittelalterlichen Handschriften zugeschrieben werden, von ihm stammen, ist eine Streitfrage. Das erste Buch enthält einen Auszug aus Euklid, der außer den Definitionen, Forderungen und Axiomen die Lehrsätze der ersten drei Bücher der Elemente, aber ohne Beweise, enthält. Das zweite Buch lehrt die Berechnung der einfachsten ebenen Figuren an Zahlenbeispielen. Cassiodorius behandelte unter dem Titel „De artibus et disciplinis liberalium literarum" in enzyklopädischer Form die sieben freien Künste.

Der Begriff der freien Künste (meistens sieben) wurde schon von den Griechen ausgebildet und ging von ihnen zu den Römern und von diesen in die Literatur des Mittelalters über. Boethius bedient sich zuerst der Bezeichnung Quadruvium für Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie, dem sich dann bald das Trivium (Grammatik, Rhetorik, Dialektik) anschloß.

4. Inder.

Hand in Hand mit einer von alters her sich bekundenden phantastischen Vorliebe für große Zahlen und einer allgemein verbreiteten Fertigkeit in der Stellung und Lösung geistreicher Probleme, die nicht selten in dichterischer Einkleidung auftraten, entwickelte sich bei den Indern eine klare Einsicht in das Wesen des Zahlensystems, die sie befähigte, jene wissenschaftlich und kulturhistorisch so bedeutungsvolle Erfindung zu machen, die wir als *Positionssystem* bezeichnen.

Es ist naheliegend, daß sich die schriftliche Zahlenbezeichnung an die sprachliche anschloß, und so finden wir denn bei vielen Völkern, z. B. bei den Römern und Griechen (der älteren Zeit), Zeichen für die einzelnen Stufenzahlen (I, X, C, M), die zur Darstellung ihrer Vielfachen entsprechend oft wiederholt werden mußten; z. B. 243 = CCXXXXIII.

Die Schwerfälligkeit dieser Zahlenschreibung bewog die Griechen, zu dem zwar systemlosen, aber praktisch vorteilhaften Mittel zu greifen, als Zahlzeichen die Buchstaben des Alphabets (und drei Episemen) zu verwenden — 27 Zeichen, womit sie die Einer, Zehner und Hunderter darstellten. Zur Bezeichnung der Tausender versahen sie die Buchstaben mit einem Striche und konnten so alle Zahlen bis 999999 schreiben.

Vollkommenere Systeme besaßen zweierlei Zahlzeichen, für die Stufenzahlen und für die Einerzahlen. Dabei haben nach dem multiplikatorischen Prinzip die Einerzahlen die Rolle von Koeffizienten (243 wird schematisch geschrieben 2 C 4 X 3 I), im elevatorischen Prinzip aber dienen die Stufenzahlzeichen nur mehr als Stellenzeiger (243 = $\ddot{2}\dot{4}3$).

Es ist bei einer derartigen Zahlenschreibung naheliegend, die Zeichen für die Stufenzahlen ganz wegzulassen, womit der Übergang zum Positionssystem vollzogen erscheint. In der Tat finden wir, wie erwähnt, schon auf alten babylonischen Tontäfelchen eine solche Benutzung des Stellenwertes. Aber die allgemeine Durchführung dieser Abkürzung scheiterte daran, daß man Zahlen, wie 2 C 3, nicht zu bezeichnen wußte. Erst mit dem Gedanken, das Fehlen von Einheiten einer Stufe

durch ein Zeichen (die Null) ersichtlich zu machen, war das Positionssystem erfunden. Dieses System, eine Frucht der lebhaften Phantasie und klaren mathematischen Einsicht, welche die Inder vereinigten, gehört zu den wichtigsten Erfindungen. In wissenschaftlicher Hinsicht ist es ein Beispiel — wohl das einzige — eines absolut vollkommenen Systems, das der Menschengeist ersonnen hat, und was die praktische Bedeutung betrifft, so genügt der Hinweis, daß es gestattet, mit denselben zehn Zeichen 0, 1, 2, .., 9 jede Zahl, sei sie noch so groß, zu bezeichnen, — daher es auch Gemeingut des Volksunterrichtes aller gebildeten Völker geworden ist.

Gesichert ist das Vorkommen der Null etwa seit 400 n. Chr. Die indische Bezeichnung derselben sunya (das Leere) wurde von den Arabern as-sifr übersetzt. Daraus machten die lateinischen Übersetzer cephirum oder ciphra, woraus einerseits chiffre, anderseits zero entstand. Mittelalterliche Benennungen der Null sind circulus, ciphra, theca und figura nihili. Aus letzterer ist vielleicht die seit dem Ende des 15. Jahrh. auftretende Bezeichnung „nulla" entstanden.

Eigentlich mathematische Schriftsteller gab es bei den Indern nicht, dagegen finden wir in den astronomischen und astrologischen Werken mathematische Kapitel eingestreut. Die bedeutendsten Schriftsteller dieser Gattung sind: Aryabhatta d. Ältere (um 476 n. Chr.), Brahmagupta (7. Jahrh. n. Chr.), Aryabhatta d. Jüngere (10. Jahrh. n. Chr.), Bhaskara Acarya (geb. 1114 n. Chr.). Die wissenschaftliche Mathematik der Inder stammt zum Teil aus griechischer Quelle und wurde konform dem nationalen Genius gestaltet, übersteigt aber im allgemeinen nicht den von den Griechen erreichten Standpunkt, ausgenommen in der Arithmetik und Algebra, denn hier trafen griechische Wissenschaft und die den Indern eigentümliche Veranlagung glücklich zusammen.

Bei den erwähnten Schriftstellern und bei dem Griechen Maximus Planudes (ungef. 1260—1310) finden wir die vorzüglichen Methoden indischer Rechenkunst,

die zunächst durch Vermittlung der Araber ins Abendland gelangten. Unter den Multiplikationsmethoden heben wir die „blitzbildende“ (heute Fouriersche) hervor. Dieses Verfahren kann man allgemein so darstellen:
$(a_0 + 10\,a_1 + 100\,a_2 + \ldots)(b_0 + 10\,b_1 + 100\,b_2 + \ldots)$
$= a_0\,b_0 + 10(a_0\,b_1 + a_1\,b_0) + 100(a_0\,b_2 + a_1\,b_1 + a_2\,b_0 + \ldots$
Nach dem hier auftretenden Gesetze verschaffte man sich jede Rangziffer sogleich vollständig genau. Bereits bei Aryabhatta d. Ä. finden wir die heute noch gebräuchlichen Regeln für das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel. In den indischen arithmetischen Büchern (besonders in Bhaskaras Lilavati) erkennen wir alle auch in unseren Rechenbüchern wiederkehrenden Anwendungen der einfachen und zusammengesetzten Regeldetri, der Gesellschafts- und Mischungsrechnung, der Zinsen- und Zinseszinsenrechnung usw. Hervorheben müssen wir die anmutige, nicht selten poetische Einkleidung der Aufgaben.

Die Algebra, die hauptsächlich in Bhaskaras Vijaganita (Wurzelrechnung) enthalten ist, bezeichnet Zeuthen als ein mit Beweisen verbundenes Rechnen. Aber die Beweise sind nicht mit griechischer Strenge geführt, sondern die Richtigkeit der Lösung bestätigt die Richtigkeit der Rechnung. Diophant hatte sich zwar von der geometrischen Darstellung frei gemacht, aber gleichwohl beschränkte er seine Lösungen auf rationale Zahlen. Solche Bedenken lagen den Indern fern, und sie konnten daher, allerdings auf Kosten der strengen Logik, das Gebiet ihrer Berechnungen viel weiter ausdehnen. Auch in bezug auf die negativen Zahlen bewiesen sie geringere Vorsicht als die Griechen. Sie nahmen die Resultate so, wie sie sich eben aus der Praxis des Rechnens ergaben. So erkannten sie auch die Doppel-

deutigkeit der Quadratwurzel und legten daher einer quadratischen Gleichung zwei Wurzeln bei, wobei einer negativen Wurzel allenfalls der Sinn einer Schuld unterlegt wurde. Negative Zahlen an und für sich wurden allerdings im allgemeinen „von den Leuten nicht gebilligt". Gleich Diophant gebrauchten die Inder für die Unbekannte und ihre Potenzen abgekürzte Bezeichnungen. Während aber ersterer mit einer Unbekannten auszukommen sucht, unterschieden sie beliebig viele Unbekannte, und zwar durch eine beigelegte Farbe. Sie unterschieden sechs Grundoperationen, indem sie das Potenzieren und Radizieren dazu zählten. Umformungen irrationaler Ausdrücke, Rationalmachen des Nenners waren ihnen geläufig; sie erkannten auch die Unmöglichkeit der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl. Der Grenzwert von $a:0$ wird von Bhaskara richtig gedeutet: „Je mehr der Divisor vermindert wird, um so mehr wird der Quotient vergrößert. Wird der Divisor aufs äußerste vermindert, so vergrößert sich der Quotient aufs äußerste. Aber solange noch angegeben werden kann, er sei so und so groß, ist er noch nicht aufs äußerste vergrößert; denn man kann alsdann eine noch größere Zahl angeben. Der Quotient ist also von unbestimmbarer Größe und wird mit Recht unendlich genannt."

Die größten Fortschritte machten die Inder auf dem Gebiete der unbestimmten Analytik, wobei sie sich im Gegensatze zu Diophant nicht mit rationalen Lösungen begnügten, sondern ganzzahlige verlangten. (Doch blieben diese Untersuchungen im Abendlande unbekannt, wo erst im 17. Jahrh. unabhängig von den Indern die Forderung nach ganzzahligen Lösungen wieder aufgestellt wurde.) Unbestimmte Gleichungen 2. Grades von der Form $xy + ax + by = c$ formten sie um in

$(x + b)(y + a) = c + ab$. Es brauchte dann nur $c + ab$ in ein Produkt ganzer Faktoren zerlegt zu werden. Den Höhepunkt der Mathematik der Inder aber bezeichnet die Lösung der Gleichung $y^2 = ax^2 + b$. Durch ihre Rechenfertigkeit gelangten sie zu einer Lösungsmethode, deren Begründung allerdings nur in der Brauchbarkeit der erhaltenen Resultate lag. Sie wurde durch Lagrange wiedererfunden und bewiesen. Diese sogenannte „zyklische Methode“ muß zwar nicht zum Ziele führen, aber sie kann bei geeigneter Wahl der Hilfsgrößen ganzzahlige Werte geben. Man löst zunächst die Gleichung $y^2 = ax^2 + 1$ mit Hilfe der empirisch angenommenen Gleichung $aA^2 + B = C^2$, aus der sich andere Gleichungen $aA_n^2 + B_n = C_n^2$ ableiten lassen, die dann durch geschickte Kombinationen eine Lösung von $ax^2 + 1 = y^2$ ergeben.

Schon von alters her besaßen die Inder nicht unbedeutende geometrische Kenntnisse, so die auch den Ägyptern bekannte Seilknüpfung, d. h. die Absteckung rechter Winkel mit Hilfe eines Seiles, das durch Knoten in die Abschnitte 3, 4, 5 (oder 15, 36, 39) geteilt ist; ferner die Vergrößerung der Oberfläche von Körpern unter Beibehaltung der Form; dann eine Zirkulatur des Quadrates, d. h. die Konstruktion eines Kreises, der gleich ist einem gegebenen Quadrate usw. Dabei lag jedoch den Indern die strenge Dialektik der griechischen Mathematiker fern. Sie begnügten sich, zum Beweise die entsprechende Figur zu konstruieren und das Wörtchen „siehe“ beizufügen. Charakteristisch ist auch die arithmetische Behandlung geometrischer Probleme. Für π gebrauchen sie die Werte $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$ und $\sqrt{10}$.

In der Trigonometrie bedienten sie sich nicht, wie Ptolemäus, der Sehnen-, sondern der Sinustafeln.

Frei von der Abneigung der griechischen Mathematiker gegen praktische und angenäherte Rechnungen führten sie an Stelle der Sehnen die Halbsehnen als Funktionen des halben Winkels ein und schufen so die Sinustrigonometrie. Das ist die wesentlichste Förderung, welche der Trigonometrie durch die Inder zuteil wurde. Doch verwerteten auch sie ihre trigonometrischen Kenntnisse nicht für geometrische Zwecke zur Lösung von Dreiecksaufgaben in der Ebene, sondern für astronomische Berechnungen.

In der Behandlung unbestimmter Gleichungen machten die Chinesen, deren Mathematik größtenteils indischen Ursprungs ist, einen bedeutenden Schritt über ihre Lehrmeister hinaus durch die sogenannte „große Erweiterung", die sich am besten durch ein Beispiel charakterisieren läßt. Gesucht sei eine Zahl, die durch 3, 5, 7 dividiert bzw. die Reste 2, 3, 2 liefert. Man suche k_1, k_2, k_3 so, daß

$$\frac{5 \cdot 7 \cdot k_1}{3} = q_1 + \frac{1}{3}, \quad \frac{7 \cdot 3 \cdot k_2}{5} = q_2 + \frac{1}{5}, \quad \frac{3 \cdot 5 \cdot k_3}{7} = q_3 + \frac{1}{7}$$

wird.

Man erhält z. B. $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ und bildet nun

$$\begin{array}{ll} 5 \cdot 7 \cdot 2 = 70 & 70 \cdot 2 = 140 \\ 7 \cdot 3 \cdot 1 = 21 & 21 \cdot 3 = 63 \\ 3 \cdot 5 \cdot 1 = 15 & 15 \cdot 2 = 30 \end{array}$$

$$140 + 63 + 30 = 233\,; \quad \frac{233}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 2 + \frac{23}{3 \cdot 5 \cdot 7};$$

23 ist eine Lösung der vorgelegten Aufgabe.

Auch die Anordnung der den Arabern seit dem Ende des 11. Jahrh. bekannten Binomialkoeffizienten in die Gestalt des arithmetischen Dreiecks treffen wir zuerst bei den Chinesen (1303).

II. Mittelalter.

1. Araber.

Die reichen Schätze mathematischer Kenntnisse, welche die Griechen und Inder aufgespeichert hatten, fanden an den Arabern verständnisvolle und dankbare Erben. In raschem Siegeslaufe hatte dieses am Anfange des 7. Jahrh. n. Chr. aus dem Dunkel des Nomadenlebens hervortretende Volk die Länder durcheilt, und hundert Jahre nach dem Tode des Propheten herrschte der Islam vom Indus bis zum Ebro. Diese ungeheure Ausdehnung ihres Gebietes bot den Arabern die Gelegenheit, griechische und orientalische Kultur aufzunehmen, und sie unterzogen sich dieser Arbeit rasch und erfolgreich, teils im persönlichen Verkehr mit den Gelehrten der unterworfenen Nationen, teils durch eine rege Übersetzungstätigkeit, die sie seit der Mitte des 8. Jahrh. auf Veranlassung kulturfreundlicher Kalifen entfalteten. Vor allem bildet die Pflege der Mathematik einen allgemein anerkannten Ruhmestitel arabischer Wissenschaft. Die geschichtliche Bedeutung der arabischen Mathematik ist nicht so sehr in selbständigen Forschungen und Fortschritten zu suchen, als vielmehr in der liebevollen und verständigen Verarbeitung des ihnen zugänglichen Materials und darin, daß sie indische Rechenkunst und griechische Wissenschaft dem Abendlande zugänglich machten zu einer Zeit, als eine direkte Benutzung der Quellen nicht möglich war. Insbesondere ist es ein Hauptverdienst der Araber, das Prinzip der indischen Zifferschrift aus Indien geholt und über alle ihre Reiche, bis Spanien einschließlich, verbreitet zu haben. Doch fehlt es unter

den arabischen Mathematikern auch nicht an originellen Denkern, denen besonders die Algebra und Trigonometrie bedeutende Fortschritte verdanken.

Die Geschichte der arabischen Mathematik beginnt in der Abassidenresidenz Bagdad (gegründet 762), wo unter den Kalifen Almansur, Harun Arraschid und Almamun die griechische und indische Mathematik und Astronomie durch Übersetzungen und selbständige Bearbeitungen Eingang fanden. Der indische Sindhind (Surya-Siddhanta, ein Lehrbuch der Astronomie etwa aus dem 5. Jahrh. n. Chr.), der Almagest des Ptolemäus und Euklids Elemente waren die ersten Schriften, die übersetzt wurden. Es folgten Übersetzungen aus Archimedes, Apollonius, Heron, Diophant u. a. Als tüchtige Übersetzer taten sich Ishak ibn Hunein († 910), Tabit ibn Kurra (833—902), Kusta ibn Luka (864 bis 923) und Abul Wafa (940—998) hervor. Gleichzeitig begann sich auch eine selbständige literarische Tätigkeit zu entfalten, an deren Spitze wir das berühmte Werk des Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (um 820) „Algebr w' almukabala", ein Lehrbuch der Algebra, stellen.

„Algebr" bedeutet Wiederherstellung, „almukabala" Gegenüberstellung. Beide bedeuten Umformungen einer Gleichung. Bildet man z. B. aus $x^2 + a = x^2 + bx + a$, $x^2 = x^2 + bx$, so ist das almukabala. Aus $ax - b = x^2$ bildet man $ax = x^2 + b$ durch algebr. Da nämlich abzuziehende Zahlen als ein Mangel angesehen wurden, so war ihre Entfernung eine Wiederherstellung. Aus algebr ist der Name Algebra zur Bezeichnung der Lehre von den Gleichungen entstanden. Das Wort Algorithmus, das zur Bezeichnung eines Rechnungsvorganges angewendet wird, ist aus Alchwarizmi (Algorithmi) gebildet.

Muhammed ibn Musa folgt griechischen und indischen Vorbildern, doch ist im allgemeinen der

griechische Einfluß überwiegend. Der schon bei Diophant hervortretende Einteilungsgrund der Gleichungen nach der Anzahl der Glieder, nicht nach dem Grade, ist hier vollständig durchgeführt, indem für die Gleichungen ersten und zweiten Grades folgende sechs Formen auftreten: $x^2 = ax$ (ein Quadrat ist gleich Wurzeln), $x^2 = a$ (ein Quadrat ist gleich einer Zahl), $ax = b$, $x^2 + ax = b$, $x^2 + a = bx$, $ax + b = x^2$.

Die Lösung der Gleichungen zweiten Grades geschieht auf geometrischem Wege, zum Teil auch durch andere Figuren als bei Euklid; z. B. $x^2 + 2x = 15$ ent-

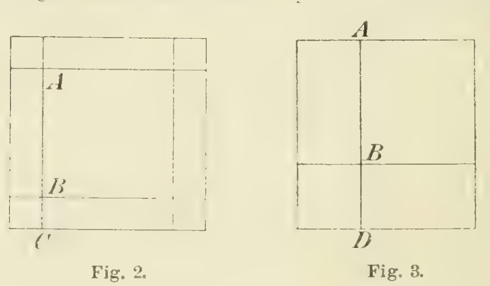


Fig. 2. Fig. 3.

weder durch eine vollkommen symmetrische Figur (Fig. 2) oder wie bei Euklid mit Hilfe des Gnomon (Fig. 3). Für $AB = x$, $BC = \frac{1}{2}$, $BD = 1$ ist im ersten Falle $x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} x + 4 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 15 + 1$, $(x + 1)^2 = 16$; im zweiten $x^2 + 2x + 1^2 = 15 + 1$. Alchwarizmi erkannte auch daß die Gleichung $x^2 + a^2 = bx$ zwei Wurzeln hat,

Ein wesentlicher Unterschied von der griechischen Algebra liegt darin, daß er Zahlenbeispiele zu seinen theoretischen geometrischen Lösungen hinzufügt, was bei Euklid nie vorkommt, während hinwieder bei Diophant die allgemeine Lösung fehlt. Aus diesem Grunde

haben spätere Schriftsteller oft in diesem Buche gesucht, was sie auch bei Euklid schon hätten finden können.

Eine wirkliche Verschmelzung der griechischen und indischen Behandlung der Arithmetik trat bei den Arabern nicht so rasch ein. Im Gegenteile finden wir um das Jahr 1000 n. Chr. zwei Schulen, die, wahrscheinlich auch in religiösen Fragen sich befehdend, in der Mathematik einen gegensätzlichen Standpunkt einnahmen. Alnasawi erweist sich vollständig vertraut mit indischer Rechenkunst, während Alkarchi nicht bloß auf dem streng wissenschaftlichen Standpunkte des Euklid steht, sondern auch prinzipiell die Benutzung der Ziffern, selbst bei weitläufigen Berechnungen, ausschließt. Auch in seinem algebraischen Werke Alfakhri fußt letzterer auf griechischer Grundlage, indem er Diophants zahlreiche Untersuchungen und Beispiele wiedergibt, zugleich aber über sein Vorbild hinaus in mehrfacher Richtung fortschreitet. Er erweitert die Zeichensprache, benutzt gelegentlich auch Zeichen für zwei Unbekannte und behandelt neue Arten von unbestimmten Gleichungen; z. B. $y^2 = x^3 + ax^2$, $z^2 = x^3 + bx^2$; er setzt $y = mx$, $z = nx$, woraus folgt $x^2 = m^2 - a = n^2 - b$, wobei m^2 und n^2 willkürliche Quadratzahlen mit der Differenz $a - b$ sind. Übrigens ist nicht zu verkennen, daß sich auch Alkarchi auf dem Gebiete des Irrationalen mit größerer Freiheit bewegt als die Griechen und irrationale Wurzelgrößen als Zahlen auffaßt, ohne natürlich allgemein gültige Begründungen für das Rechnen zu liefern. Daß sich die Araber dessen bewußt waren, sehen wir bei Alchaijami († 1123), der zwischen arithmetischer und geometrischer Auflösung der Gleichungen unterscheidet. Die erstere verlangt er rational, ja sogar ganzzahlig, die letztere kann irrational sein und muß deshalb

geometrisch dargestellt werden und verlangt auch einen geometrischen Beweis.

Während bei Alchwarizmi und den älteren Arabern die Gleichungen noch im fortlaufenden Texte geschrieben waren und alles in Worten dargestellt wurde, entwickelte sich in späterer Zeit eine ziemlich ausgeprägte Zeichensprache, besonders bei den Westarabern. Die von den Indern angewendete Methode des doppelten falschen Ansatzes zur Auflösung von Gleichungen erhielt bei den Arabern besonders durch Ibn Albanna (geb. um 1252) eine weitere Ausbildung. Sie hieß die Methode der Wagschalen und ging in die lateinischen Übersetzungen als „regula falsi“ über. Ist z. B. die Gleichung $a x + b = 0$ gegeben und sind z_1 und z_2 beliebige Zahlenwerte und setzt man dann $a z_1 + b = y_1$, $a z_2 + b = y_2$, so ist $x = \frac{z_2 y_1 - z_1 y_2}{y_1 - y_2}$. Diese Methode ist dadurch von besonderer Bedeutung geworden, daß sie in neuerer Zeit zu einer Näherungsmethode für Gleichungen höheren Grades (Interpolationsmethode) erweitert wurde.

Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade wurden ganz in griechischer Weise gelöst mittels Kegelschnittslinien und anderer von den Alten zu diesem Zwecke erfundener Kurven. Auf diesem Gebiete tat sich Alkuhi (um 975) hervor; in systematischer Beziehung ging am weitesten Alchaijami, der die Gleichungen dritten Grades in Gruppen teilte, indem er die zweigliedrigen Formen einfache, die dreigliedrigen und viergliedrigen aber zusammengesetzte Gleichungen nannte.

Auch bei Besprechung der Arithmetik der Araber haben wir ein Werk des Alchwarizmi an die Spitze zu stellen, das nur in lateinischer Übersetzung vorhanden ist und mit den Worten beginnt: „Algoritmi dicit“. Es

tritt uns hier das indische Positionssystem entgegen, auch die Rechnungsmethoden weisen auf indische Vorbilder hin. Es werden sechs Operationen gelehrt. Beim Addieren und Subtrahieren beginnt man links, beim Halbieren rechts, beim Verdoppeln wieder links. Beim Multiplizieren beginnt man mit der höchsten Ziffer des Multiplikands und schreibt die Teilprodukte darüber. Da jede Ziffer des Produktes, die durch Einheiten eines späteren Teilproduktes zu ändern ist, im Sande oder Staube verbessert wird, so steht zum Schlusse das Produkt über dem Multiplikand. Beim Dividieren wird der Divisor unterhalb des Dividenden geschrieben und rückt während der Operation nach rechts. Quotient und Rest erscheinen über dem Divisor.

Die Westaraber hatten im Wesen dieselben Methoden, doch lehrt Ibn Albanna (geb. um 1252) auch das Kolumnenrechnen, wobei die Kolumnen in Gruppen zu je dreien zusammengefaßt werden. Die bei den Westarabern gebräuchlichen Ziffern sind infolge zeitlich verschiedener Entlehnung aus Indien von denen verschieden, die sich schon früher bei den Ostarabern eingebürgert hatten. Die im 10. Jahrh. im Abendlande auftretenden Ziffern sind Varianten der westarabischen.

Auch auf dem Gebiete der allgemeinen Arithmetik folgen die Araber den Indern. Namentlich die Ostaraber beschäftigten sich mit der Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke (Alchodschandi um 970, Ibn Alhusain um 1000) und mit der Aufgabe, ein Quadrat zu finden, das, um Gegebenes vergrößert oder verkleinert, wieder ein Quadrat gibt. Auf diesem Wege gelangten sie zu interessanten zahlentheoretischen Ergebnissen, besonders über quadratische Reste; auch versuchte Alchodschandi zu beweisen, daß im rationalen

Zahlengebiete die Summe zweier Kuben nicht wieder ein Kubus sein kann. Manche Sätze über kubische Reste verwendete er zur Begründung der Neuner-, Achter- und Siebenerprobe.

In der Geometrie waren die Araber durchaus Schüler der Griechen, die nirgends, namentlich auch nicht in der Lehre von den Kegelschnitten, über ihre Lehrmeister hinauskamen. Bei Alchwarizmi finden wir die Einteilungen nach Euklid, die Rechnungen nach Heron. Neben dem griechischen Werte $\pi = \frac{22}{7}$ verwendeten die Araber auch die indischen $\frac{62832}{20000}$ und $\sqrt{10}$.

Abul Wafa schließt sich in seinem Buche „Über geometrische Konstruktionen" eng an Pappus an. Er sowohl als auch viele andere arabische Mathematiker beschäftigten sich mit der archimedischen Aufgabe der Kugelteilung, mit der Verdoppelung des Würfels und mit der Dreiteilung des Winkels. Die späteren Geometer zeigten sich besonders gewandt in der Zurückführung geometrischer Aufgaben auf Gleichungen, ohne jedoch theoretisch bedeutsame Resultate zu erzielen (z. B. Abul Dschud, um 1050).

Abul Wafa führte zuerst Konstruktionen mit einer unveränderlichen Zirkelöffnung aus. Von hier verbreiteten sich derartige Aufgaben zu den italienischen Mathematikern, die sie im 15. und 16. Jahrh. mit Vorliebe behandelten (Lionardo da Vinci, Tartaglia, Benedetti u. a.). In Deutschland finden wir die Geometrie mit einer Zirkelweite in der „Geometria deutsch" (Ende des 15. Jahrh.) und besonders bei Albrecht Dürer.

Die arabische Trigonometrie stammt aus griechischen und indischen Quellen, aber nicht ohne bedeutende eigene Leistungen. Albattani (um 850—929), der größte arabische Astronom und Mathematiker, führte an Stelle der im Almagest berechneten Sehnen des Winkels die

indischen Halbsehnen des doppelten Winkels (den Sinus) ein, und zwar in vollem Bewußtsein der Bedeutung dieses Fortschrittes. Die Ptolemäische Sehnentafel verdrängte er durch eine von $1/2°$ zu $1/2°$ fortschreitende Sinustafel. Er führte auch die Tangente (erster Schatten, umbra versa) und die Kotangente (zweiter Schatten, umbra recta) ein, und bereits sein Zeitgenosse Habasch berechnete (um 912) eine Tangenten- und Kotangententafel.

Die Entstehung des Terminus „Sinus" ist wahrscheinlich folgende: Die Sehne heißt im Sanskrit jiva. Die Araber übernahmen diese Bezeichnung als Fremdwort: dschiba. Genau dieselben Konsonanten, welche arabisch dschiba zu lesen sind, lassen aber auch die Lesung dschaib zu (da die arabische Schrift keine Vokale bezeichnet). Letzteres ist nun ein wirkliches arabisches Wort, das von den lateinischen Übersetzern ganz richtig mit sinus wiedergegeben wurde.

Auch ein anderer Gegensatz zum Almagest tritt bei Albattani noch schärfer als bei den Indern hervor. Die Lehrsätze haben das geometrische Gepräge durchaus verloren und den Charakter algebraischer Formeln angenommen. Der Sinussatz für ebene Dreiecke, der schon in einer Formel Albattanis enthalten ist, wird von Albiruni († 1048) als bekannter Satz ausgesprochen. Auch der sphärische Sinussatz war in der ersten Hälfte des 11. Jahrh. bereits entdeckt.

Abul Wafa, der erste trigonometrische Systematiker des Orients, erfand eine neue Methode zur Berechnung von Sinustafeln von $1/4°$ zu $1/4°$, die den $\sin \frac{1}{2}°$ mit einer Genauigkeit lieferte, die sich bis zur 9. Dezimalstelle erstreckt. Er gab auch die erste Formel für $\sin(\alpha + \beta)$. Gleichzeitig entstanden auch die Hakimitischen Sinustafeln, auf Veranlassung des ägyptischen Kalifen Alhakim von Ibn Yunus (960—1009) angefertigt.

Unter den Westarabern bringt Dschabir ibn Aflah (gewöhnlich Geber genannt, um 1100) eine sphärische Trigonometrie mit strengen Beweisen. Sie enthält eine Reihe von Formeln über das rechtwinklige sphärische Dreieck, geht aber in der ebenen Trigonometrie nicht über den Almagest hinaus, ja vermeidet sogar Sinus und Kosinus und rechnet mit den ganzen Sehnen.

Einen glänzenden Abschluß fand die arabische Trigonometrie durch den Perser Nasir Eddin Tusi (1201 bis 1274), der in seiner Schrift „Über die Figur der Schneidenden" (d. h. über den Satz des Menelaus) eine ganz vollständige ebene und sphärische Trigonometrie darstellt, die beide hier zum ersten Male als Teile der reinen Geometrie auftreten, d. h. nicht mehr als Einleitung in die Astronomie dienen.

2. Die Zeit der Abazisten und Algorithmiker.

Während den Arabern die Werke der griechischen Mathematiker zur Verfügung standen, besaßen die abendländischen Völker zur Zeit der Merowinger und Karolinger bloß einige dürftige, von Römern angefertigte Auszüge aus Euklid und Heron, die an Umfang und Bedeutung weitaus nicht dem Schatze mathematischer Kenntnisse gleichkamen, den die Griechen von den Ägyptern überkommen hatten.

In den Kloster- und Domschulen wurde das Kopfrechnen geübt in Verbindung mit Finger- und Kolumnenrechnen. Eine bedeutende Rolle spielte dabei die Berechnung des Osterfestes (computus paschalis oder ecclesiasticus). Wir besitzen aus jener Zeit eine Sammlung von Rechenrätseln (propositiones ad acuendos sensus iuvenum), die an ähnliche Sammlungen in der griechischen Anthologie und in indischen Schriften

erinnern und noch heute in den Aufgabenbüchern wiederkehren. Sie stammen aus den Schulen Bedas (672?—735) und Alkuins (736—804), die wir als die Hauptvertreter der sieben freien Künste in jener Zeit anzusehen haben.

Demselben Kreise gehören an Hrabanus Maurus (788—856), Walafried Strabo (810—894), Remigius von Auxerre († um 908), Odo von Cluny (879 bis 942), Abbo von Fleury (945—1003). In welcher Weise die Rechnungen ausgeführt wurden, davon erhalten wir Kenntnis durch Gerbert (940—1003, seit 999 Papst Silvester II.) und seinen Schüler Bernelinus (um 1020). Es ist das Rechnen auf dem Kolumnenabakus unter Anwendung von Marken, die mit den Ziffern (mit Ausschluß der Null) bezeichnet waren und Apices hießen. Diese wurden in die vertikalen und mit den Stufenzahlen überschriebenen Kolumnen gelegt, so daß die Zahlen gleichsam im Positionssystem erschienen, wobei die 0 durch eine leere Kolumne ersetzt war. Charakteristisch ist die komplementäre Division, die neben der einfachen gelehrt wird.

Der Divisor 16 z. B. hat bis 20 das Komplement 4, der Divisor 78 bis 80 das Komplement 2, der Divisor 623 bis 700 das Komplement 77. Nun wird durch den vergrößerten Divisor dividiert und zum Reste jedesmal wieder das Produkt aus dem Quotienten und Komplemente addiert. Dieses Verfahren ist zwar sehr umständlich, aber zuverlässig, da die Quotientenziffer niemals zu groß angesetzt werden kann. Überdies kommen Subtraktionen nur in der leichten Form $10 - a$ vor.

Durch den Einfluß Gerberts, der ein selbstdenkender Mathematiker war, fand die Schule der Abazisten weite Verbreitung. Über den Abakus schrieben Guido von Arezzo (um 1028), Franco von Lüttich (um 1040), Hermannus Contractus (1013—1054), Radulf von Laon († 1130), Gerland (um 1134).

Allmählich erwuchsen dieser Schule immer zahlreichere Gegner in den Algorithmikern, die nach indischer Art unter Anwendung der Null rechneten. Auf zwei Wegen, durch den direkten Verkehr (besonders der italienischen Kaufleute) mit den Arabern und durch Übersetzungen aus dem Arabischen und Hebräischen ins Lateinische, gelangte seit dem Beginn des 12. Jahrh. griechische und indische Mathematik zu den abendländischen Völkern.

Als hervorragende Algorithmiker und Übersetzer sind zu nennen Plato von Tivoli (um 1120), Atelhart von Bath (um 1120, erste Euklidübersetzung aus dem Arabischen), Johann von Sevilla (um 1140) und besonders Gerhard von Cremona (1114—1187). Durch die eifrige Tätigkeit dieser Männer war das Abendland am Ende des 12. Jahrh. im Besitze lateinischer Übersetzungen des Euklid, des Almagest, der Schriften des Theodosius und Menelaus, der Astronomie des Albattani, der Arithmetik und Algebra des Alchwarizmi. Die indische Positionsarithmetik, die Auflösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades waren allgemein zugänglich. Durch die wachsende Kenntnis und Wertschätzung der griechischen Mathematik begann unsere Wissenschaft sich neu zu entfalten.

3. Die Zeit des Wiedererwachens der Mathematik in Europa.

An der Spitze der neuen Epoche stehen zwei Meister ersten Ranges, deren Einfluß für lange Zeit maßgebend blieb: Leonardo von Pisa und Jordanus Nemorarius. Leonardo von Pisa (1180?—1250?), auch Fibonacci (Filius Bonacii) genannt, lernte schon als Knabe in der pisanischen Handelsniederlassung Bugia in Nord-

afrika, später auf Reisen in Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien die mathematischen Schriften der Inder, Pythagoreer, Euklids u. a. kennen.

Sein Hauptwerk ist der „Liber Abaci“ (1202), in dem er die vorhandenen Übersetzungen ausgiebig benutzte. Es enthält die vier Spezies in ganzen und gebrochenen Zahlen, die elegante Subtraktionsmethode durch Zuzählen, die blitzbildende Multiplikation der Inder, die Rechnung mit Brüchen in moderner Art auch bezüglich der äußeren Form durch Einführung des Bruchstriches, dann die Regeldetri, arithmetische Reihen erster und zweiter Ordnung, die Regel vom einfachen und doppelten falschen Ansatze; ferner spezielle unbestimmte Gleichungen, Quadrat- und Kubikwurzelausziehung nach indischem Muster, irrationale Größen, Algebra und Almukala, zahlreiche geometrische Anwendungen, quadratische Gleichungen nach arabischer Behandlungsweise, aufsteigende Kettenbrüche. Leonardos Darstellung in diesem Werke ist durchweg von Beweisen in geometrischer Form begleitet.

Dasselbe ist auch der Fall in seiner „Practica geometriae“ (1220), die, auf Euklid, Archimedes, Heron und Ptolemäus basierend, metrologische, arithmetische, planimetrische, trigonometrische und stereometrische Aufgaben durcheinander enthält, wobei besonders die Auszüge aus den damals sehr wenig bekannten stereometrischen Büchern Euklids hervorzuheben sind. Doch bekundete Leonardo auch große Selbständigkeit, besonders in der Kreisrechnung, wo er $\pi = 1440 : 458\frac{1}{3}$ (= 3,1418 ..) bestimmt. Seine Beweise sind oft von den griechischen verschieden.

Zwei andere Schriften, „Liber quadratorum“ und „Flos“, enthalten Zahlentheoretisches, Lösung spezieller

unbestimmter und bestimmter Gleichungen und verfolgen den Zweck, die Methoden zu schildern, nach denen Leonardo die Aufgaben löste. Von besonderem Interesse ist die Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, für die Leonardo den außerordentlich genauen Näherungswert $x = 1^\circ\, 22'\, 7''\, 42'''\, 33^{IV}\, 4^{V}\, 40^{VI}$ angibt, leider ohne zu verraten, wie er ihn erhielt.

Leonardo stand in naher Beziehung zum Hofe des Kaisers Friedrich II., der seiner wissenschaftlichen Tätigkeit reges Interesse entgegenbrachte.

Jordanus Nemorarius (ein Deutscher aus der Mainzer Diözese, wahrscheinlich identisch mit Jordanus Saxo, dem zweiten General des Dominikanerordens, † 1236) verfaßte eine „Arithmetik", in welcher die Neuerung hervortritt, überall an Stelle willkürlicher Zahlen Buchstaben zu setzen, allerdings so, daß sie mangels geeigneter Symbole im Zusammenhange des Textes auftreten und nicht zu einer eigentlichen Buchstabenrechnung zusammengestellt werden.

Jordanus schrieb auch über den Algorithmus mit Beweisen der Rechenregeln. Der Traktat „De numeris datis", ein System algebraischer Regeln, gibt neue Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen und Gleichungssysteme. Auch sein geometrisches Werk „Über Dreiecke", das auf der Grundlage der Elemente Euklids ruht, zeichnet sich durch selbständige Bearbeitung des Stoffes aus.

Da Jordanus Professor an der 1206 gegründeten Pariser Universität war, die zur Zeit der Scholastik eine führende Rolle besaß, so übten seine Schriften einen bedeutenden Einfluß aus.

In Paris verfaßte Johannes de Sacrobosco (13. Jahrh.) seinen weitverbreiteten Traktat über die

Rechenkunst, eine Sammlung von Regeln für das praktische Rechnen mit ganzen Zahlen ohne Beweise und Zahlenbeispiele, die Jahrhunderte hindurch als Grundlage für den Unterricht benutzt wurde. Er unterscheidet neun Rechnungsarten: Numeratio, Additio, Substractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio, Extractio. Unter Progressio ist aber nicht etwa die Lehre von den Progressionen im allgemeinen zu verstehen, sondern nur die Summierung der natürlichen, der geraden und der ungeraden Zahlen. Extractio ist das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel. Einen vorzüglichen Kommentar zu diesem Lehrbuche mit trefflichen Beispielen verfaßte 1291 Petrus von Dazien.

Die übersetzende und kommentierende Tätigkeit des 12. Jahrh. wurde auch jetzt noch eifrig fortgesetzt. Wir erwähnen Wilhelm von Moerbecke († bald nach 1281), Wilhelm von Lunis (13. Jahrh.) und besonders Johannes Campanus (um 1270), die ihrer Zeit neuen Wissensstoff zuführten. Letzterer ist besonders berühmt durch seine Ausgabe der Elemente Euklids (mit Einschluß des 14. und 15. Buches). Dieselbe enthält zwar nicht die erste Übersetzung Euklids ins Lateinische — es existierten solche schon aus dem Griechischen und Arabischen —, aber sie erlangte den größten Einfluß auf die folgende Zeit durch die Bemerkungen und Zusätze des Verfassers. Wir erwähnen den Satz über die Summe der Winkel im Sternfünfeck, über die Dreiteilung des Winkels (mittels der Konchoide), über die Irrationalität des Goldenen Schnittes. Der Winkel zwischen Tangente und Kreisbogen, den Campanus für kleiner als jeden geradlinigen Winkel erklärt, führt ihn zur Betrachtung stetiger Größen. Die Streitfragen über diesen Winkel (von Jordanus „Kontingenzwinkel“ genannt) beschäftigten die

Mathematiker lange Zeit und bahnten der Infinitesimalrechnung die Wege.

Der hervorragendste Vertreter der Mathematik in England zu dieser Zeit ist Thomas Bradwardinus (1290?—1349). Er verfaßte eine Arithmetica speculativa und eine Geometria speculativa. In letzterer behandelt er die Lehre von den Sternvielecken und isoperimetrischen Figuren, von den Proportionen und irrationalen Größen sowie mancherlei Stereometrisches. In der Schrift „Über das Stetige" unterscheidet Bradwardin zwei Unendlichkeiten, die kathetische und die synkathetische, erstere identisch mit unserem Überendlichen oder Transfiniten, dem vom Anfang an das Merkmal der Begrenztheit fehlt, letztere übereinstimmend mit unserem Endlosen oder Infiniten, welches aus der endlichen Größe durch unbegrenztes Wachsen hervorgeht.

In Frankreich ragt um die Mitte des 14. Jahrh. als vorzüglicher Geometer Dominicus de Clavasio hervor („Practica geometriae" mit Beweisen, 1346), weitaus am bedeutendsten aber und als Mathematiker gleichen Ranges mit Bradwardinus ist Nicole Oresme (ungefähr 1320—1382). In den „Latitudines formarum" behandelt er die graphische Darstellung veränderlicher Naturerscheinungen, wobei die eine Größe als Länge (Abszisse) aufgetragen wird, z. B. die Zeit, die andere als Breite (Ordinate), z. B. die Temperatur. Es nehmen also hier die Koordinaten den Charakter eines allgemeinen Hilfsmittels an, doch sind die „Latitudines" keineswegs der analytischen Geometrie gleichzuachten, denn es fehlt noch die Verbindung der analytischen Formel mit der geometrischen Form.

Das bedeutendste Werk Oresmes ist der „Algorismus proportionum", wo bereits Potenzen mit gebrochenem

Exponenten auftreten, die erst in viel späterer Zeit Gemeingut wurden. Auch die Regeln für das Rechnen mit derartigen Potenzgrößen sind entwickelt; z. B. $a^{\frac{n}{m}} = (a^n)^{\frac{1}{m}}$, $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{1}{m}}$.

Trotz dieser großen Fortschritte, welche die Franzosen auf mathematischem Gebiete gemacht hatten, büßten sie doch die führende Rolle nach und nach ein. Dagegen bürgerte sich die Mathematik in Deutschland mehr und mehr ein, und auch in Italien bereitete sich ein neuer Aufschwung vor. Der Grund dieser Umwandlung ist hauptsächlich in den politischen Ereignissen zu suchen, die einerseits die Entwicklung der Wissenschaften hemmten, anderseits die ausländischen Gelehrten veranlaßten, in ihre Heimat zurückzukehren. So gelangten die im Laufe des 14. Jahrh. nach dem Muster von Paris gegründeten deutschen Universitäten Prag (1348), Wien (1365), Heidelberg (1386), Köln (1388), Erfurt (1392) zu rascher Blüte. Wenn auch der allgemeine Unterrichtsbetrieb in den mathematischen Wissenschaften an diesen Schulen lange Zeit minderwertig blieb, so fehlte es den Freunden derselben doch nicht an gegenseitiger Anregung.

Wien vor allen war die vorzugsweise mathematische Universität. Sie verdankt diesen Vorrang zwei deutschen Gelehrten, die vorher in Paris Mathematik lehrten und dann an die neue Universität übersiedelten, Albert von Sachsen († 1390) und Heinrich von Langenstein aus Hessen (1325—1397). Durch ihre Lehrtätigkeit und ihre Schriften verhalfen sie der Mathematik in Deutschland zu einer bleibenden Stätte.

Französischen Einfluß bezeugt auch die erste in deutscher Ausgabe (neben der lateinischen) verfaßte Geo-

metrie, die sogenannte „Geometria Culmensis“ (um 1400). Dieselbe enthält im Anschlusse an Dominicus de Clavasio, aber auch gelegentlich über ihn hinausgehend, Berechnungen von Dreiecken, Vierecken, Vielecken und teilweise krummlinig begrenzten Figuren.

All die großen Fortschritte, die französische und englische Mathematiker machten und die allmählich auch nach Deutschland sich verbreiteten, entstammen den Gelehrtenkreisen der Universitäten. Von einer Algebra aber ist noch immer keine Rede, trotz der Ausbildung, deren sie sich bei Leonardo von Pisa und Jordanus erfreute. Nur in Italien, wo die Schule des Leonardo niemals ausstarb, obwohl auch hier ein Rückgang unleugbar stattfand, beschäftigte man sich mit dieser Disziplin. Schon Leonardo hatte eine Zahlengleichung dritten Grades näherungsweise gelöst, nachdem er gezeigt hatte, daß es nicht möglich sei, sie durch Quadratwurzeln allein zu lösen. Nun sind es aber nicht mehr so sehr bestimmte Zahlengleichungen, die das Interesse beherrschen, sondern die Frage nach der allgemeinen Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades tritt immer mehr in den Vordergrund.

4. Die Zeit des Aufschwunges der Mathematik in Deutschland.

Im 15. Jahrh. beginnen elementare mathematische Kenntnisse Volkseigentum zu werden. Es entstehen eigene Rechenschulen, die Kenntnis der indischen Ziffern dringt in immer weitere Kreise vor, deutsche und italienische Rechenmeister pflegen die Rechenkunst, und ihre Schriften erlangen seit der Erfindung des Bücherdruckes weite Verbreitung.

Eine wichtige Rolle spielt in den Schulen das Rechnen „auf den Linien“. Das Abakusrechnen der alten Griechen und Römer war im früheren Mittelalter in ein Kolumnenrechnen übergegangen, dadurch, daß die einzelnen Rechenpfennige auf den betreffenden senkrecht zum Rechner gerichteten Kolumnen zu einer Ziffer sich verdichteten. Das Rechnen „auf den Linien“ ist dagegen wieder identisch mit dem ältesten Abakusrechnen, nur wurden die Linien durchweg wagrecht gezogen. Von unten nach oben hatte eine Marke auf der 1., 2., 3., ... Linie den Wert 1, 10, 100, ... , zwischen den

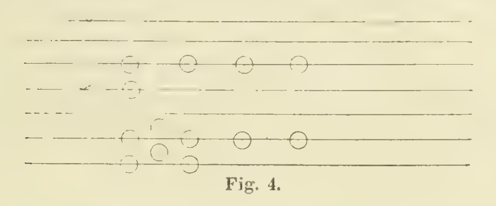


Fig. 4.

Linien aber bedeutete sie 5, 50, 500, ... Obenstehende Figur (Fig. 4) stellt uns die Zahl 41 097 dar. Beim Subtrahieren legt man den Minuenden, beim Multiplizieren den Multiplikanden auf. Die Division wird als wiederholte Subtraktion behandelt. Dieses Linienrechnen erhielt sich bis ins 17. Jahrh., wo es dem eigentlichen Zifferrechnen, von dem es auch schon bisher in besseren Schulen begleitet war, weichen mußte.

Zu den ersten gedruckten Rechenbüchern in deutscher Sprache gehören die Bamberger Rechenbücher von 1482 (nur in wenigen Fragmenten erhalten) und 1483. Letzteres enthält nach dem Muster italienischer kaufmännischer Rechenbücher die vier Spezies in ganzen und gebrochenen Zahlen, „die gulden Regel“ (Regeldetri),

„vom Wechsel“ (Umrechnung von Geldsorten nach veränderlichen Wertverhältnissen), „von gesellschaft“, Tolletrechnung zur Berechnung des Feingehaltes von Legierungen (Tollet wahrscheinlich vom venezianischen toleta = tavoletta), Mischungsrechnungen.

Die bedeutendsten Namen auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Mathematik im 15. Jahrh. sind Nikolaus von Cusa (1401—1464) und Johannes Regiomontanus (Johann Müller aus Königsberg in Franken, 1436 bis 1476). Ersterer konnte bei seiner vielfältigen politischen und wissenschaftlichen Tätigkeit unserer Wissenschaft nur als Nebenbeschäftigung huldigen. Um so mehr müssen wir seinen mathematisch schöpferischen Geist bewundern, der nicht so sehr in abgeschlossenen Resultaten, als in neuen Gedanken und Fragestellungen zutage tritt, die der Mit- und Nachwelt bedeutsame Anregungen darboten. Seine meisten mathematischen Schriften beziehen sich auf eine Aufgabe, allerdings eine Aufgabe schwierigster Art — die Arkufikation einer Geraden. Vom gleichseitigen Dreieck ging er zu umfanggleichen Vielecken von immer größerer Seitenzahl und endlich zum Kreise über, den er als Unendlichvieleck auffaßte. Das Hauptverdienst des Cusanus auf mathematischem Gebiete ist seine Auffassung des Unendlichkleinen, dessen allbeherrschende Bedeutung bei ihm zuerst deutlich hervortritt.

Regiomontan gehörte der Wiener Hochschule an, die noch immer an mathematischer Bedeutung die anderen deutschen Universitäten überragte. Schon seine Vorgänger Johann von Gmunden († 1442), der erste Fachprofessor der Mathematik an einer deutschen Hochschule, und Georg von Peuerbach (1423—1461) hatten die Trigonometrie neu zu beleben begonnen. Letzterer ver-

faßte eine Sinustafel, worin er den Halbmesser gleich 600 000 setzte und die Winkel von 10 zu 10 Minuten fortschreiten ließ. Diese Tafel gelangte nicht zum Abdrucke, wohl aber im Jahre 1541 die einleitenden Bemerkungen, in denen sich Georg von Peuerbach als klardenkender Mathematiker zu erkennen gibt.

Der eigentliche Schöpfer der modernen Trigonometrie ist Regiomontan, der in seinem Lehrbuche „De triangulis omnimodis" unter ausgiebiger Benutzung arabischer Werke die Grundzüge der ebenen und sphärischen Trigonometrie aufstellt. Dieses 1463 vollendete Werk umfaßt fünf Bücher. Wir finden darin den Sinussatz, die Formel für die Fläche eines Dreiecks: $\frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma$ u. a. Die wichtigsten Sätze des ganzen Werkes besagen, wie man aus den drei Winkeln des sphärischen Dreiecks die drei Seiten, aus den drei Seiten die drei Winkel berechnen kann. Die Bedeutung des ersten Satzes tritt uns klar entgegen, wenn wir erwägen, wie schwer es einem in ebener Geometrie Geschulten werden mußte, sich in den Gedanken zu finden, es könnten die drei Winkel zur Bestimmung eines Dreiecks ausreichen. Dieser Satz ist unbedingt neu und Eigentum Regiomontans, während der zweite allerdings schon bei Nasir Eddin vorkommt.

In seinen trigonometrischen Tafeln vollzog Regiomontan den Fortschritt zur vollständigen Durchführung des dezimalen Systems, und zwar in voller Erkenntnis seiner Bedeutung. Während seine ersten Sinustafeln gleich denen des Johann von Gmunden und Georg von Peuerbach noch eine Vermengung des sexagesimalen und dezimalen Systems enthalten, ist seine dritte Sinustafel auf den Radius 10^7 berechnet. Die Genauigkeit ist also dieselbe wie in einer siebenstelligen Tafel, ohne daß jedoch eigentliche Dezimalbrüche zur Anwendung kämen.

Auch in seiner Tangententafel, der ersten im Abendlande, ist die dezimale Teilung durchgeführt, indem die numeri (Tangenten) in Teilen des Radius 100 000 angegeben werden.

Durch sein Werk über die Dreiecke brachte Regiomontan die Trigonometrie wieder so ziemlich auf jene Höhe, die sie bei den Arabern erreicht hatte. Leider hinderte ihn der Tod, sein Werk selbst im Drucke zu veröffentlichen, und so kann von einer umfassenden Einwirkung erst geredet werden, nachdem es 1533 gedruckt worden war.

Nicht minder wechselvoll als das Schicksal Regiomontans selbst war auch das seiner Schriften. Im Alter von 15 Jahren kam er nach Wien als Schüler und Mitarbeiter Peuerbachs. Nach dem Tode des Meisters übernahm er die Weiterführung seiner unvollendeten Arbeiten, darunter einer Übersetzung des Almagest aus dem Griechischen, die Peuerbach im Auftrage des Kardinals Bessarion herstellen wollte. In Begleitung dieses Kardinals reiste nun Regiomontan nach Italien, um sich mit der griechischen Sprache vertraut zu machen, kehrte 1468 nach Wien zurück, folgte aber bald einem Rufe des Matthias Korvinus nach Ofen. 1471 finden wir ihn in Nürnberg, wo er eine Sternwarte und Druckerei einrichtete und sich dauernd niederlassen wollte. Aber schon 1475 wurde er von Sixtus IV. zur Kalenderreform nach Rom berufen, wo er bereits am 6. Juli des folgenden Jahres, erst 40 Jahre alt, starb. Sein Nürnberger Freund Bernhard Walther, dem er sein ganzes wissenschaftliches Hab und Gut anvertraut hatte, hielt dieses bis zu seinem Tode (1504) ängstlich verborgen. Jetzt aber wurden die wertvollen Handschriften leichtfertig verstreut. Dabei scheint manches verloren gegangen zu sein. Die fünf Bücher über die Dreiecke kaufte Willibald Pirkheimer, der sie durch Johann Schöner zum Drucke befördern ließ.

Wenn auch die reine Geometrie in dieser Zeit zurücktrat, so finden wir doch bei einzelnen Mathematikern selbständige Leistungen. Regiomontan unterzog in

einer Schrift vom Jahre 1463 die Kreisquadratur des Cusanus einer strengen Kritik. Außerdem schrieb er eine Einleitung zu einer beabsichtigten Euklidausgabe und versah eine Euklidhandschrift mit Zusätzen, unter denen besonders die Lehrsätze über Sternvielecke hervorzuheben sind.

Mit Sternvielecken beschäftigte sich auch Lionardo da Vinci (1452—1519), der, ohne eigentlicher Mathematiker zu sein, doch bei jeder Gelegenheit sein Interesse an geometrischen Konstruktionen, besonders der regelmäßigen Vielecke, bewies, wobei er nicht selten die Anwendung unveränderlicher Zirkelweite forderte.

Bis in die zweite Hälfte des 15. Jahrh. dauert der Einfluß der arabischen Geometrie. Jetzt erst eröffnet der Humanismus ein direktes Zurückgehen auf die alten Quellen, zunächst auf die Agrimensoren, dann auch auf die älteren Originale, deren Kenntnis besonders durch die byzantinischen Gelehrten, die nach der Zerstörung Konstantinopels (1453) nach dem Westen zogen, verbreitet wurde.

III. Neuzeit.

1. Die Zeit des Aufschwunges der Algebra.

Von größter Wichtigkeit ist die im 15. Jahrh. sich vollziehende Ausbreitung der Algebra über die Grenzen Italiens hinaus. Die älteste Spur einer deutschen Algebra finden wir in einer Münchener Handschrift vom Jahre 1461, die teils in lateinischer, teils in deutscher Sprache die Summe des damals in Deutschland vorhandenen mathematischen Wissens enthält. Wir finden dort den

Algorismus proportionum des Oresme, die Geometrie des Bradwardin, die geometrischen Schriften des Cusanus, die Geometria practica des Dominicus de Clavasio, ferner eine vollständige Bruchrechnung, dann zahlreiche Regeln zur Lösung von Aufgaben. In diesem Zusammenhange erscheint das erwähnte deutsche Stück Algebra, dessen Anfang lautet: „Machmet in dem puech algebra und almalcobula hat gepruchet diese Wort census, radix, numerus. Census ist ain yede zal die in sich selb multiplicirt wirt, das ist numerus quadratus. Radix ist die wurtz der zal oder des zins. Numerus ist ain zal für sich selb gemerket, nit als sie ain zins oder ain wurtz ist." Daraus ersehen wir, daß ein Auszug aus der Algebra des Alchwarizmi vorliegt.

Einen Dresdener Handschriftenband aus derselben Zeit, der verschiedene algebraische Abhandlungen vereinigt, benutzte Johann Widmann von Eger, der 1489 sein Werk „Behennd und hübsch Rechnung uff allen kauffmannschafften" veröffentlichte. Diese Schrift enthält als erste Abteilung „Von kunst und art der zal an yr selbst" das Rechnen mit ganzen und gebrochenen Zahlen, als zweite Abteilung „Von der ordnung der zal" die Lehre von den Proportionen, die Regeldetri und eine Menge von einzelnen Aufgaben verschiedensten Namens. Die Zeichen + und — wendet er, älteren Vorlagen folgend, schon ziemlich regelmäßig an. Hier finden wir auch eine „Regel Algobre oder Cosse" erwähnt, neben den noch älteren „regule delacose" einer Münchener Handschrift ein Zeugnis dafür, daß man in Deutschland wußte, daß in Italien, wohin allein das Wort „Cosse" verweisen kann, die Algebra in Übung war.

Im dritten, geometrischen Teile beruft sich Widmann auf Julius Frontinus. Die Schwierigkeiten der Terminologie in

deutscher Sprache sehen wir aus Definitionen wie: Punctus ist ein klein Ding, das nit zu teilen ist; Angulus ist ein Winkel, der da gemacht ist von zweien Linien. Man unterscheidet „gescherffte“ (spitze) und „weyte“ (stumpfe) Winkel.

Die Lehre von den Gleichungen führte bei den Italienern verschiedene Namen. Außer Algebra auch ars magna (im Gegensatze zu ars minor, der gemeinen Arithmetik), ars rei et census (res, das Ding, bedeutet die Unbekannte, census ihr Quadrat). Von der Bezeichnung cosa (= causa) für die Unbekannte stammt der Name regola della cosa und daher die „ars cossica“, die „Coß“ der deutschen Algebraiker des 15. und 16. Jahrh.

Widmann ist der erste, der an einer Universität — in Leipzig — Vorlesungen über Algebra abhielt. Er legte dabei den erwähnten Dresdener Sammelband zugrunde, dem er selbst einige Aufgaben beifügte. Alles in allem ergibt sich folgendes: Algebra gelehrten Ursprungs aus der Schule des Jordanus war um die Mitte des 15. Jahrh. in Deutschland bekannt, mit ihr vereinigte sich Algebra italienisch-kaufmännischen Ursprungs, und Widmann ist der erste, bei dem wir diese Vereinigung nachweisen können. Er und die folgenden Cossisten legten das Fundament zu unserer heutigen symbolischen Algebra.

Italienischer Einfluß macht sich auch geltend in einem mathematischen Werke ersten Ranges, das der Franzose Nicolas Chuquet († um 1500) in Lyon 1484 unter dem Titel „Triparty en la science des nombres“ verfaßte. Der erste Teil handelt vom Rechnen mit rationalen Zahlen. Wir erwähnen die hier vorkommenden Bezeichnungen Million, Million von Millionen oder auch Byllion, Tryllion usw., die ohne Zweifel italienischen Ursprungs sind. Sehr bemerkenswert ist die gemeinsame Betrachtung einer arithmetischen und geometrischen Reihe:

$$1 \quad 2 \quad 3 \; \ldots \; n$$
$$a \quad a^2 \quad a^3 \; \ldots \; a^n \, .$$

Multipliziert man, sagt Chuquet, zwei Glieder der unteren Reihe, so erhält man wieder ein Glied derselben Reihe, dessen in der oberen zu suchende Ordnungszahl die Summe der Ordnungszahlen der beiden Faktoren ist. Damit ist der Gedanke logarithmischen Rechnens ausgesprochen, wenn auch ein wirkliches Rechnen erst mehr als hundert Jahre später darauf gegründet wurde. Den Abschluß des ersten Teiles bildet ein Mittelwertsatz zur näherungsweisen Auflösung von Gleichungen. Der zweite Teil behandelt Irrationalzahlen.

Im dritten Teile finden wir die Algebra. Während Chuquets Vorbilder für die einzelnen Potenzen der Unbekannten eigene Zeichen verwenden, ersetzt er sie durch kleine rechts oben angeschriebene Zahlen. So bedeuten 12^1, 12^2, 12^3 nach heutiger Bezeichnung $12\,x$, $12\,x^2$, $12\,x^3$. Folgerichtig bezeichnet er die Zahl 12 selbst durch 12^0, ja er scheut sich nicht, sogar negative Exponenten einzuführen. Seine Gleichungsauflösungen zeigen eine auffallende Ähnlichkeit mit dem heutigen Verfahren; z. B.

$R^2\, 4^2\, \tilde{p}\, \underline{4^1}\, \tilde{p}\, 2^1\, \tilde{p}\, 1$ egaulx a 100 | $\sqrt{4\,x^2 + 4\,x} + 2\,x + 1 = 100$
$R^2\, 4^2\, \tilde{p}\, \underline{4^1}$ dune part et $99\, \tilde{m}\, 2^1$ daultre | $\sqrt{4\,x^2 + 4\,x} = 99 - 2\,x$
$4^2\, \tilde{p}\, 4^1$ egaulx a $9801\, \tilde{m}\, 396^1\, \tilde{p}\, 4^2$ $4\,x^2 + 4\,x = 9801 - 396\,x + 4\,x^2$
400^1 dune part et 9801 daultre $400\,x = 9801$.

Überall bewundern wir den klaren Blick, der nicht an Sonderfällen haftet, sondern sich dem Allgemeinen zuwendet.

Da Chuquets Werk nicht im Drucke erschien (erst 1880 wurde es gedruckt) und überdies dem Verständnisse der Zeitgenossen erhebliche Schwierigkeiten bot, erlangte es bei weitem nicht den verdienten Einfluß. Um so größere Verbreitung fand das gleichzeitige Werk

„Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita“ des Luca Paciuolo (etwa 1445—1514), das 1494 in Venedig gedruckt wurde. Es enthält neben der praktischen Arithmetik die ganze Algebra in den ersten vier Abschnitten, Geometrie und Stereometrie im engsten Anschlusse an Leonardo von Pisa im fünften Abschnitte. Als besondere Verdienste des Paciuolo wollen wir hervorheben, daß er das Halbieren und Verdoppeln aus der Reihe der Rechnungsarten ausschloß, daß er ferner der modernen Divisionsmethode (unterwärts) Bahn brach. Er nahm auch die zahlentheoretischen Untersuchungen des Leonardo in sein Werk auf und förderte dadurch das mathematische Denken in einer Richtung, die über die praktischen Bedürfnisse hinausging. Die Summa ist das erste Lehrbuch der Rechenkunst, in dem Wahrscheinlichkeitsaufgaben vorkommen, während allerdings der Begriff der Wahrscheinlichkeit im mathematischen Sinne schon älter ist. Von hervorragendem Werte sind die algebraisch gelösten Aufgaben der Geometrie, die den Zusammenhang von Algebra und Geometrie zum allgemeinsten Bewußtsein brachten. Fügen wir noch bei, daß wir in dem reichhaltigen Werke auch eine Anleitung zur doppelten Buchführung und einen Tarif, d. h. Münz-, Maß- und Gewichtsvergleichungstabellen finden, so werden wir das Urteil M. Cantors begreifen, daß die Summa jenes Werk war, welches das Bedürfnis der Zeit erforderte, welches aber auch dieses Bedürfnis durchaus befriedigte. Es begann bei den ersten Anfangsgründen der Rechenkunst und endete mit Aufgaben, die auch ein heutiger Leser nicht ohne Nachdenken lösen kann. Es enthielt Vorschriften, die außerhalb des Gebietes der Rechenkunst fielen, aber für den Kaufmann von Bedeutung waren; es entstammte der Feder eines Mannes,

der früher in kaufmännischen Kreisen lebte, später an verschiedenen Hochschulen als Lehrer tätig war.

Paciuolo veranstaltete ferner eine Euklidausgabe, die im Jahre 1509 bei Ratdolt in Venedig erschien. Die erste Druckausgabe des Euklid, enthaltend die aus dem Arabischen stammende Übersetzung und die Anmerkungen des Campanus, war von demselben Buchdrucker im Jahre 1482 hergestellt worden. 1505 veröffentlichte Zamberti eine Euklidübersetzung aus dem Griechischen und erging sich darin in heftigstem Tadel gegen Campanus. Paciuolos Euklid ist als eine Ehrenrettung des Campanus anzusehen.

Druckausgaben älterer Mathematiker veranstaltete auch der Franzose Lefèvre aus Étaples (Faber Stapulensis 1455—1537) in der ausgesprochenen Absicht, dadurch dem Tiefstande der Mathematik an der Pariser Universität abzuhelfen. 1496 gab er die Arithmetik des Jordanus Nemorarius heraus, 1514 die Werke des Nikolaus von Cusa, 1516 die Elemente Euklids (in der berühmten Druckerei des Stephanus) nach der Übersetzung des Campanus und des Zamberti.

Die vielverheißenden Ansätze der Algebra in Deutschland und Italien im 15. Jahrh. gelangten im Laufe des folgenden Jahrhunderts zu erfreulicher Entfaltung. Das erste deutsche Lehrbuch der Algebra ist das 1521 gedruckte Rechenbuch des Heinrich Schreiber aus Erfurt, genannt Grammateus, Lehrers an der Wiener Universität, dessen bemerkenswerter Titel zugleich eine vollständige Inhaltsangabe umfaßt: „Ayn new kunstlich Buech, welches gar gewiß und behend lernet nach der gemainen regel Detre, welschen practic, regeln falsi un̄ etlichē regeln Cosse mancherlay schöne un̄ zuwissen notürfftig rechnūg auf kauffmannschafft. Auch nach

den proportion der kunst des Gesāgs jm diatonischen geschlecht auß zutaylē monochordū, orgelpfeyffē vñ ander jnstrument auß der erfindung Pythogore. Weytter ist hierjnnen begriffen buechhalten durch das Zornal, Kaps und schuldbuch. Visier zumachen durch den quadrat vñ triangel mit vil andern lustigen stücken der Geometrey. Gemacht auff der löblichen hoen schul zu Wieñ in Oesterreich durch Henricū Grammateum, oder schreyber von Erffurdt der siebē freyen künste Maister. Mit Kayserlichē gnaden vnd Privilegien das buech nicht nach zu truckē in sechs jare." Am Ende: „Gedruckt zu Nürnberg durch Johannem Stüchs für Lucas Alantsee Buechfurer vnd Bürger zu Wien." Wir sehen, daß Grammateus eine gewisse Vollständigkeit anstrebte, wie sie in der Summe des Paciuolo erreicht ist, die ihm als Vorbild gedient haben mag. Er läßt auch zuerst unter den deutschen Schriftstellern das Halbieren und Verdoppeln weg. Die sogenannte welsche Praktik ist der letzte Ausläufer des Stammbruchrechnens, das von den Ägyptern zu den Griechen, von diesen zu den Arabern überging und, durch die Italiener ausgebildet, bei den deutschen Rechenmeistern hohes Ansehen erlangte. In der Algebra behandelt er dieselben sieben Gleichungsformen, die sich schon in der Dresdener Algebra vorfinden. Seine Musterbeispiele sind: $2x = 4$, $3x^2 = 27$, $2x^3 = 128$, $2x^2 + x = 55$, $2x^2 + 18 = 15x$, $12x + 24 = 3\frac{10}{49}x^2$, $5x^4 = 20480$.

Die im Titel enthaltenen Namen Zornal und Kaps sind Journal und Kapsel, d. i. das Tagebuch und das Kassabuch zur Aufzeichnung des in einer Kapsel verwahrten Bargeldes.

Charakteristisch für das 16. Jahrh. ist das Auftreten zahlreicher Rechenbücher, die je nach den Schulen, für die sie bestimmt waren, in lateinischer oder deutscher

Sprache das Rechnen „auf den Linien“ und „auf der Feder“ in größerem oder geringerem Umfange lehrten. Sie enthalten fast durchwegs nur Regeln und Beispiele, Gründe und Beweise fehlen. („Machs nach der regel wie hie und kumpt recht.“) Daß sie einem wirklichen Bedürfnisse entgegenkamen, beweisen die oft zahlreichen Auflagen, die sie erlebten. Wir nennen einen Algorithmus linealis von Balthasar Licht (Leipzig 1500), Johann von Landshut (Krakau 1513), Heinrich Stromer (Wien 1520), das Enchiridion des Johann Huswirt (1501), den Algorithmus des Theoderich Tzwivel (1507), die Rechenbücher des Jakob Köbel (1514, 1520), der noch die römischen Ziffern als „die gewenlich teutsch Zal“ im Gegensatz zu der „ziffern zale“ benennt, des Johann Böschenstein (1514), des Peter Apianus (1532), der seit Grammateus der erste Universitätslehrer (Ingolstadt) war, der ein deutsches Rechenbuch verfaßte, des Gemma-Frisius (1550), des Georg Reichelstein (1532), der als einer der ersten in Deutschland die Rechenregeln in Reime brachte; z. B.

„So du magst von der obern nit
Ein Ziffer subtrahirn mit sitt,
Von zehen sollt sie ziehen ab,
Der nechst under addir eins knab.“

Der berühmteste unter den deutschen Rechenmeistern ist Adam Riese (1492—1559), dessen Rechenbücher weiteste Verbreitung fanden. Er veröffentlichte 1518 eine Rechnung auf der Linie, 1522 ein Rechenbuch auf der Linie und Feder. Das dritte und häufigste Buch führt den Titel: „Rechnung nach der Lenge auff den Linichen und Feder. Darzu forteil und behendigkeit durch die Proportiones Practica genannt mit grüntlichem unterricht des Visierens. Durch Adam Riesen

im 1550 Jar." Diese Rechenbücher ragen nicht sowohl inhaltlich, als vielmehr in methodischer Hinsicht hervor und lassen den erfahrenen Lehrer erkennen. Wir finden überall das Aufsteigen vom Konkreten zum Abstrakten, vom Einfachen zum Zusammengesetzten. Endlich legt Riese besonderes Gewicht auf die stete Übung des Erlernten, die ja gerade beim Rechenunterrichte von der größten Bedeutung ist. Er ist unerschöpflich in „holdseligen" Exempeln, die in immer neuem Gewande den alten Stoff darstellen. Und entsprechend dem Wunsche des rechnenden Publikums seiner Zeit setzte er den Mechanismus des Verfahrens bei jedem Beispiele auseinander. Diesen Umständen verdankten seine Rechenbücher ihre Popularität, ihre weite Verbreitung und ihren 200 Jahre dauernden Gebrauch. Bemerkenswert ist, daß Riese das Wort Million nur in der Verbindung „eine Million Gulden" gebrauchte, die unbenannte Zahl aber durch „tausend tausend" bezeichnete.

Außer den gedruckten Schriften hinterließ Riese auch eine handschriftliche Coß (vollendet 1524), die sich eng an die Dresdener Algebra anschließt. Dadurch, daß Riese den in seiner Vorlage als Wurzelzeichen dienenden viereckigen Punkt rechts mit einem schrägen Striche versah, wurde er der Urheber des noch heute üblichen Wurzelzeichens.

Vollen Beifall errang die im Jahre 1525 gedruckte Coß des Christoph Rudolff. Der erste Teil ist der Rechenkunst gewidmet und entspricht inhaltlich einem von demselben Verfasser 1526 herausgegebenen Rechenbuche, das viele Auflagen erlebte. Bei Abfassung der Coß bediente sich Rudolff einer Wiener Handschrift „Regulae Cosae vel Algebrae", einer trefflichen Abhandlung, deren kurze und dennoch klare Regeln einen sehr

angenehmen Eindruck machen; z. B.: „Conditiones circa $+$ vel $-$ in additione. $\left.\begin{array}{l}+ \text{ et } + \\ - \text{ et } -\end{array}\right\rangle$ facit $\left.\begin{array}{l}+ \\ -\end{array}\right\rangle$. Si fuerit $\left\langle\begin{array}{l}+ \text{ et } - \\ - \text{ et } +\end{array}\right\rangle$, simpliciter subtrahatur brevior numerus a majori et residuo sua adscribatur nota.“ Auch zahlreiche Beispiele in lateinischer und deutscher Sprache sind den Regeln beigefügt. Trotz der freien Benutzung der Zeichen $+$ und $-$ kannte Rudolff doch nur positive Gleichungswurzeln, er bediente sich auch für die Potenzen der Unbekannten noch immer der bei den alten Cossisten üblichen Symbole; dagegen machte er darin einen wichtigen Fortschritt, daß er endlich die zahlreichen Regeln wegließ und sich auf die allgemeinen Gleichungsformen beschränkte. Als Wurzelzeichen wendete er, gleich Riese, den Haken (viereckiger Punkt mit schrägem Striche) an. Ein einfacher Haken bedeutete die Quadratwurzel, ein zweifacher die vierte, ein dreifacher die dritte Wurzel. Auch die in seinen Vorlagen enthaltenen Beispiele vermehrte er erheblich durch kubische Aufgaben sowie durch bestimmte und unbestimmte Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Den Anhang zu Rudolffs Rechenbuche bildet die „Schimpffrechnung“, eine Sammlung von Rechenscherzen und Rechenrätseln, worunter sich auch die Aufgabe von der gemeinsamen Zeche (regula coeci, regula virginum, regula potatorum) befindet, eine unbestimmte Gleichung, die in allen Aufgabenbüchern wiederkehrt.

Das Hauptwerk der deutschen Coß ist die „Arithmetica integra“ des Michael Stifel (1486 oder 1487 bis 1567), die 1544 gedruckt wurde. Mit diesem Werke erweist sich Stifel nicht bloß offenkundig als den weitaus bedeutendsten Cossisten, sondern auch als den ersten großen deutschen Zahlentheoretiker, ja als einen der

größten für alle Zeiten, da er ganz neue Probleme in Angriff nahm.

Das Werk ist eingeleitet durch eine Vorrede Melanchthons, der sich überhaupt bei jeder Gelegenheit in Wort und Tat als Freund unserer Wissenschaft bewährte und den mathematischen Unterricht besonders dadurch förderte, daß er Sorge trug, überall, auch in den nicht gelehrten Schulen, das alte römische Rechnen durch das indische zu ersetzen und vor allem statt der römischen Zahlzeichen die indisch-arabischen einzuführen.

Das 1. Buch handelt über die rationalen Zahlen. Hier finden wir die Zusammenstellung einer arithmetischen und geometrischen Reihe, die wir schon bei Chuquet antrafen, aber mit erheblichen Zusätzen. Stifel erweitert beide Reihen auch nach links, z. B.

$$\begin{array}{ccccccc} -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3 \\ \frac{1}{8}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}, & 1, & 2, & 4, & 8, \end{array}$$

und sagt, es wäre möglich, an dieser Stelle ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften der Zahlen einzuschalten, wodurch er vorahnend die Fruchtbarkeit des Begriffes bekundet, den man später das Logarithmieren nannte. Er nennt die Glieder der arithmetischen Reihe „Exponenten“ der entsprechenden Glieder der geometrischen Reihe.

Stifel machte auch den ersten Schritt zu einer Erweiterung des Begriffes der Wurzel, indem er das Wurzelausziehen weiter, ja man kann sagen beliebig weit ausdehnte. Zu diesem Zwecke stellte er eine Tafel der Binomialkoeffizienten bis zur 17. Potenz zusammen mit der Bemerkung, daß „ihre Fortsetzung ins Unendliche jeder leicht einsieht, wenn er erst die Art sie herzustellen er-

kannt hat". Bei der ausführlich auseinandergesetzten Bildung dieser Tabelle geht Stifel von dem Satze aus, den wir jetzt so zu schreiben pflegen:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Dies ist das erste nachweisbare Auftreten des sogenannten Pascalschen Dreiecks in Europa. In China treffen wir diese Berechnung der Binomialkoeffizienten, und zwar genau in der heute üblichen Anordnung, schon in einer Schrift aus dem Jahre 1303.

Wir finden ferner in diesem Buche interessante Abschnitte über Teilbarkeitsregeln, vollkommene Zahlen, Primzahlen. Die Anzahl der Teiler eines Produktes von n Primzahlen wird nach Cardano zu $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$ angegeben. Diametralzahl heißt das Produkt zweier Zahlen, deren Quadratsumme ein rationales Quadrat gibt. Da unzählige rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenuse haben, so gibt es auch mehr als eine Quadratzahl mit gleicher Quadratsumme ihrer Faktoren, z. B. $65^2 = 25^2 + 60^2 = 39^2 + 52^2$; daher sind $25 \cdot 60 = 1500$ und $39 \cdot 52 = 2028$ Diametralzahlen von gleichem Diameter. Stifel führt diese Untersuchung so weit, daß er zu der richtigen Behauptung kommt, ein Produkt $a\,b$ sei dann und nur dann eine Diametralzahl, wenn $a : b = (2n^2 + 2n) : (2n + 1)$ oder $a : b = (4n^2 + 8n + 3) : (4n + 4)$ sei.

Eine andere Aufgabe ist die des zirkulären Abzählens, eine Art von Schließungsproblem. Die $4n - 4$ Randfelder eines aus n^2 kleineren Quadraten bestehenden Quadrates sollen mit Ordnungsziffern versehen werden, indem man, auf irgend einem Randfelde beginnend, nach Abzählung einer bestimmten Felderzahl in bestimmter Richtung eine Ordnungsziffer einsetzt, bis sämt-

liche Felder mit Ausnahme der ersten beziffert sind; es fragt sich, wieviel Felder jedesmal abzuzählen sind, damit die Aufgabe erfüllt werde. Weiter beschäftigte sich Stifel mit der Herstellung von Zauberquadraten.

Magische Quadrate werden so hergestellt, daß man alle Zahlen von 1 bis n^2 in ebenso viele schachbrettartig geordnete Felder verteilt, so daß die Summe der Zahlen in jeder Horizontalreihe, in jeder Vertikalreihe und in beiden Diagonalreihen stets dieselbe wird, nämlich $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$, da $1+2+3+\ldots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$ in n Reihen von gleicher Summe verteilt ist. Ein bekanntes Beispiel ist das Quadrat der ersten 16 Zahlen auf Dürers Kupferstich „Melencolia“:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Die Beschäftigung mit Zauberquadraten treffen wir bei Indern, Chinesen, Arabern, Byzantinern; der erste deutsche Mathematiker, der ihnen sein Interesse zuwendete, war Adam Riese in seinem Rechenbuche von 1522.

Das 2. Buch handelt vom Irrationalen im engen Anschlusse an das 10. Buch der Elemente Euklids. Ausgehend von dem Satze, daß durch Multiplikation eines Bruches mit sich selbst niemals eine ganze Zahl entstehen könne, zeigt er, daß ein Irrationales nie gleich sein könne einem Rationalen, wenn es auch zwischen zwei Rationalzahlen falle. Daher leugne Euklid die Zahleigenschaft des Irrationalen und handle im 10. Buche nur von irrationalen Strecken. So ist das 2. Buch der Arithmetica integra eine fortlaufende Erläuterung jenes schwierigen Euklidischen Buches, wobei sich Stifel einer

bequemen Zeichensprache bediente. Er gebrauchte die Zeichen + und — und brachte System in die von Riese und Rudolff eingeführte Wurzelbezeichnung, indem er dem Wurzelhaken seine Potenzzeichen beifügte und dadurch auch in der Darstellung dem Wurzelbegriff die allgemeinste Entfaltung verlieh.

Das 3. Buch enthält die Algebra. Hier räumt Stifel vor allem mit den acht Gleichungsformen und zahlreichen Regeln der Vorgänger, die er als „vexationes populi“, Menschenquälerei, bezeichnet, auf und ersetzt sie durch eine einzige. Auch für mehrere Unbekannte und ihre Potenzen stellt er symbolische Bezeichnungen auf. Die regelrechte Anordnung einer Gleichung ist nach seiner allgemeinen Vorschrift die, daß die höchste Potenz der Unbekannten mit positivem Koeffizienten auf der einen, alles übrige auf der anderen Seite der Gleichung steht; doch bedient er sich auch anderer Anordnungen, ja in einem Falle reduziert er die Gleichung auf Null. Wie für die anderen Cossisten haben auch für Stifel nur positive Gleichungswurzeln einen Sinn. Negative Zahlen, die er im Gegensatze zu den „wahren“ „absurde“ Zahlen nennt, erklärt er als der erste für kleiner als Null, welche die Mitte zwischen beiden einnehme. Am Schlusse des 3. Buches werden schwierigere Aufgaben des Cardano behandelt, wobei es sich gewöhnlich um Zurückführung der Gleichung auf einen niedrigeren Grad handelt, die aber nicht nach einem allgemeinen Verfahren, sondern durch besondere Kunstgriffe ausgeführt wird.

Ein Jahr später (1545) veröffentlichte Stifel die „Deutsche Arithmetica“, die nicht für wissenschaftliche Kreise berechnet war und daher im ersten Teile nur das Rechnen auf den Linien, dieses allerdings in vollem Umfange sogar bis zum Ausziehen dritter und vierter

Wurzeln, im zweiten Teile die Coß bringt, deren Aufgaben bis zu den gemischt quadratischen Gleichungen führen.

1553 veranstaltete Stifel eine neue Ausgabe der Rudolffschen Coß, deren Inhalt er erläuterte und weiter ausführte. Besonders zu erwähnen ist die Wurzelausziehung aus algebraischen Ausdrücken, wobei er sich wieder der Tafel der Binomialkoeffizienten bediente. Stifel, der aus Cardanus die Reduktion höherer Gleichungen auf niedere durch Wurzelausziehen kennen gelernt hatte, meinte nämlich, daß auf solche Weise die Lösung aller Gleichungen möglich sein müsse.

Schon Rudolff hatte seine Coß mit einer Hindeutung auf die kubischen Gleichungen geschlossen. Dies veranlaßte Stifel, die unterdessen veröffentlichte Lösung und Beispiele dazu beizufügen unter dem Namen der „Cubiccoß".

Die Werke Stifels wurden von den Mathematikern aller Länder eifrig ausgebeutet, so daß der Einfluß der deutschen Coß neben der italienischen Algebra allgemein maßgebend wurde.

Den wichtigsten Fortschritt machte in der ersten Hälfte des 16. Jahrh. die Algebra in Italien durch die allgemeine Lösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades. Im Verlaufe der Geschichte dieser Entdeckung treten besonders die Namen Hieronimo Cardano (1501—1576), Nicolo Tartaglia (1501?—1557) und Luigi Ferrari (1522—1565) hervor, deren Träger durchwegs bedeutende Mathematiker, aber abenteuerliche Charaktere waren, so daß es nicht möglich ist, aus dem Getümmel leidenschaftlicher Fehden, die sie untereinander führten und die weit über die gelehrten Kreise hinaus Parteiungen erregten, die Wahrheit herauszuhören.

Schon am Anfange des Jahrhunderts war Scipione del **Ferro** († 1526) im Besitze der Auflösung der kubischen Gleichung von der besonderen Form $x^3 + a x = b$; diese Kenntnis erlangte späterhin auch Tartaglia und durch ihn Cardano, der sie 1545 veröffentlichte, und zwar gegen den Willen Tartaglias. Zugleich teilte Cardano auch die durch seinen Schüler Ferrari vollzogene Lösung der biquadratischen Gleichung, die kein kubisches Glied enthält, mit. Die Veröffentlichungen erfolgten in dem Werke „Artis magnae seu de regulis algebraicis liber unus" (gedruckt 1545 in Nürnberg).

Cardano behandelt nicht bloß die Gleichungsformen $x^3 + a x = b$, $x^3 = a x + b$ und $x^3 + b = a x$, deren Lösung ihn Tartaglia mehr oder minder deutlich gelehrt hatte, sondern auch $x^3 = a x^2 + b$, $x^2 + a x^2 = b$, $x^3 + b = a x^2$. Die beiden ersten werden durch $x = y + \frac{a}{3}$, $x = y - \frac{a}{3}$ vom quadratischen Gliede befreit. Die dritte Form behandelt er durch $x = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{y}$, wodurch sie in $y^3 + b = a \sqrt[3]{b} \cdot y$ übergeht. Kubische Gleichungen mit vier Gliedern führt er durch Substitutionen, die stets auf $x = y \pm \frac{a}{3}$ hinauskommen, auf frühere Formen zurück. Er fand zuerst drei Wurzeln kubischer Gleichungen, während früher nie Gleichungen mit mehr als zwei Wurzeln bekannt geworden waren; er erkannte den Zusammenhang des Koeffizienten des quadratischen Gliedes mit der Summe der Wurzeln, auch im Falle gleicher Wurzeln. Hier wird auch eine Näherungsmethode zur Auflösung von Gleichungen gelehrt. die erste, die in Europa veröffentlicht wurde.

Algebraischen Inhaltes ist auch die „Regula Aliza“ von 1570. In der nachgelassenen „Ars magna arithmeticae“ bringt Cardano, allerdings ohne Beweis, Regeln für die Anzahl der positiven Wurzeln von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades.

Wir verdanken Cardano auch die erstmalige richtige Beantwortung von Wahrscheinlichkeitsproblemen in der „Practica Arithmeticae et mensurandi generalis“ von 1539, wo er eine von Paciuolo nicht entsprechend gelöste Aufgabe richtig erledigt. Hier finden wir auch schon die Aufgabe, die man 200 Jahre später „Petersburger Aufgabe“ nannte: Ein Reicher und ein Armer spielen um gleichen Einsatz. Gewinnt der Arme, so wird am folgenden Tage um verdoppelten Einsatz gespielt und dieses Verfahren fortgesetzt; gewinnt der Reiche, so ist das Spiel sofort zu Ende. In einem nachgelassenen Werke „Über das Würfelspiel“ spricht er mit klarer Einsicht das später so genannte „Gesetz der großen Zahlen“ aus.

Das Hauptwerk Tartaglias, der „General Trattato di numeri et misure“ (1556—1560), ist ein vortreffliches Lehrbuch der Rechenkunst und Geometrie von großer Reichhaltigkeit und Klarheit, in dem uns auch manches Neue begegnet, darunter einige Reihenbetrachtungen und kombinatorische Aufgaben, ferner eine wirkliche Methode zum Rationalmachen zweigliedriger Nenner. Hier begegnen uns auch zuerst runde Klammern als Zeichen der Zusammengehörigkeit verschiedener Ausdrücke.

Von besonderer Bedeutung erscheint eine Aufgabe aus der Lehre von den Maximalwerten einer Funktion: Die Zahl 8 soll in zwei Teile geteilt werden, die miteinander und überdies mit ihrer Differenz vervielfacht das größtmögliche Produkt hervorbringen. Tartaglia sagt: Man halbiere 8; das Quadrat der Hälfte, vermehrt

um sein Drittel, ist dann das Quadrat der Differenz der beiden Teile. Allgemein lautet also die Regel, wenn a die Zahl und x, y die beiden Teile sind, folgendermaßen: $(x - y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3}$, also

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{12}}, \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}}.$$

Der letzte Abschnitt des Werkes enthält die Algebra, die jedoch über quadratische Gleichungen nicht hinausgeht. Den Glanzpunkt des „General Trattato" bilden die geometrischen Kapitel, deren zahlreiche — häufig auf den Gebrauch unveränderter Zirkelweite eingeschränkte — Konstruktionsaufgaben Tartaglia als gewandten und geistreichen Geometer erkennen lassen.

Als einfache Beispiele der interessanten Konstruktionen mit einer Zirkelöffnung führen wir folgende an: Eine Strecke in eine beliebig gegebene Anzahl gleicher Teile zu teilen.

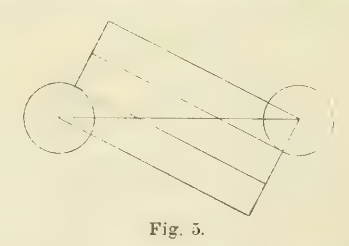


Fig. 5.

Um die Endpunkte der Strecke werden mit dem gegebenen Zirkel Kreise beschrieben und auf ihnen Bogen von 60° vom Schnittpunkte der Strecke aus aufgetragen, auf dem einen Kreis nach oben, auf dem anderen nach unten. Die Mittelpunkte der Kreise verbindet man mit den so auf den Kreisen selbst bestimmten Punkten durch Radien, die parallel sind und auf das n-(z. B. 3-)fache verlängert werden. Die Ver-

bindungslinien der entsprechenden Punkte auf diesen beiden Strecken schneiden die gegebene Strecke in den gesuchten Punkten. — Über einer Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen. Man schneide von A aus auf der (eventuell verlängerten) AB mittels des gegebenen Kreises AD ab und ebenso von B aus BC, konstruiere über AD und BC die gleichseitigen Dreiecke, wodurch man E als dritten Eckpunkt des gleichseitigen Dreieckes über AB erhält. (Fig. 6.)

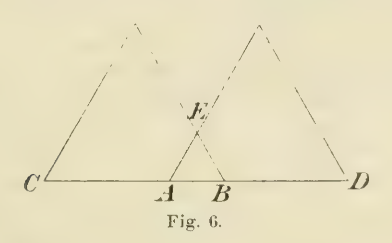


Fig. 6.

Obwohl in dieser Periode des Aufschwunges der Algebra die Geometrie zurücktreten mußte, beweist uns doch das Beispiel Tartaglias, daß es nicht ganz an Männern fehlte, die ihr verständnisvolle Beachtung widmeten. Diese Tatsache finden wir bestätigt, wenn wir einen Blick auf die anderen Länder werfen. Wir heben den Portugiesen Pedro Nuñes (Nonius, 1492—1577) hervor, der den Rumbus, die Linie kürzester Schiffsbahn entdeckte, die später von Snellius Loxodrome benannt wurde.

Nuñes machte auch einen geistreichen Vorschlag für genaue Winkelmessungen, der aber mit dem sogenannten Nonius nichts zu tun hat, dessen Erfindung vielmehr dem deutschen Mathematiker Clavius (Klau) zuzuschreiben ist (1606).

Unter den Deutschen erwähnen wir Peter Apianus (Bienewitz, 1495—1552) und Gemma-Frisius (1508 bis 1555), der die ersten Vorschriften zu einer wahren

Triangulation gab und damit an die Spitze der niederländischen geographischen Schule trat, deren Hauptvertreter, Gerhard Mercator, sein unmittelbarer Schüler war.

Ein tüchtiger Geometer war Johannes Werner (1468 bis 1528), ein gründlicher Kenner der griechischen Kegelschnittslehre und Freund strenger Beweisführung. In einer seiner zahlreichen Handschriften trigonometrischen Inhaltes war die Erfindung der sogenannten Prosthaphäresis (von *πρόσθεσις*, Addition, und *ἀφαίρεσις*, Subtraktion) enthalten, der Vorgängerin des logarithmischen Rechnens, die Multiplikationen durch Additionen und Subtraktionen ersetzen lehrte.

Neben Werner haben wir als hervorragenden geometrischen Schriftsteller zu nennen Albrecht Dürer (1471—1528), den größten deutschen Künstler des 16. Jahrh. 1525 veröffentlichte er ein Werk unter dem Titel „Underweysung der messung mit dem zirkel und richtscheyt in Linien ebnen vnd gantzen corporen durch Albrecht Dürer zusamen getzogen vnd zu nutz allen kunstliebhabenden mit zugehörigen figuren in truck gebracht", das eine reiche perspektivische Literatur in Deutschland begründete. Unter den zahlreichen Kurvenkonstruktionen finden wir hier zum erstenmal die Epizykloide, beschrieben von jedem Punkte der Peripherie eines Kreises, der auf der Peripherie eines anderen, ihn von außen berührend, rollt.

Dürer ist der erste, der Näherungskonstruktionen stets mit dem vollen Bewußtsein ausführt, daß er es mit solchen zu tun habe. So sagt er z. B. bei der Verwandlung des Quadrates in einen Kreis: „Solches ist noch nit von den gelerten demonstriert. Mechanice aber das ist beyleyfig also das es im werk nit oder gar ein kleins felt mag dise vergleychnüss also gemacht werden."

In der auf den Würfel angewendeten Lehre von der Beleuchtung und vom Schattenwerfen spricht er den Satz aus, daß alles, was zwischen denselben Grenzstrahlen enthalten sei, dem Auge in einer Größe erscheine, „es sey nahent oder fern, aufrecht vber ort oder krum“. Auch die Zeichnungen zusammenhängender Körpernetze sind Dürers Erfindung. In allem bewährte sich Dürer als wahren Geometer, der geometrische Strenge mit Freude an der Gestalt verband.

Dürer vermeidet die Fremdwörter. Er nennt die Kreisfläche „eyn runde Ebne“, das Quadrat „gefierte Ebne“, die Kugel „eyn kugelete Ebne“, die Zylinderfläche „eyn bogen Ebne“. Der Punkt heißt „eyn tupff“. Parallele „die alweg gleich weit von einander lauffen“ oder „eyn barlini“, die Ellipse „Eierlinie“, die Parabel „Brennlinie“, die Hyperbel „Gabellinie“, die Epizykloide „Spinnenlinie“.

Eine wissenschaftliche Tat vollzog 1533 Simon Grynäus der Ältere durch die erste Ausgabe des Urtextes der Euklidischen Elemente samt den Erläuterungen des Proklus. Derselbe Gelehrte veröffentlichte 1538 den griechischen Almagest, und 1544 erfolgte unter Leitung des Thomas Venatorius (Gechauff) eine Ausgabe des griechischen Archimedes. Zugleich wurden die Übersetzungen der griechischen Mathematiker bald ins Lateinische, bald in eine lebende Sprache immer häufiger (z. B. 1562 eine deutsche Übersetzung der ersten sechs Bücher der Elemente Euklids von Wilhelm Holzmann [Xylander], 1575 eine lateinische Diophantübersetzung von demselben). Von besonderem Werte ist der lateinische Euklidkommentar des Christoph Clavius (Klau, 1537 bis 1612), der 1574 erschien und in Italien und Deutschland wiederholt gedruckt wurde.

Nahm infolgedessen die Verbreitung und Wertschätzung geometrischer Kenntnisse stetig zu, so mehrten

sich anderseits auch die Schriftsteller, die das von den Alten Überlieferte durch neue Gesichtspunkte zu bereichern strebten. Hierher gehören die Franzosen Johannes Buteo (1492—1572), ein geistvoller Geometer, und Petrus Ramus (1515—1572), die Italiener Giovanni Battista Benedetti (1530—1590), Francesco Maurolico (1494—1575), Federigo Commandino (1509 bis 1575), welche die Mechanik durch geometrische Begründung der Mathematik anzugliedern begannen. Die beiden letztgenannten entwickelten überdies eine rege Tätigkeit als verständnisvolle Übersetzer und Herausgeber der antiken Mathematiker.

Maurolico ist auch der Erfinder der Methode der vollständigen Induktion durch den Schluß von n auf $n + 1$, einer der fruchtbarsten der gesamten Mathematik.

Bedeutende Förderung auf dem angedeuteten Wege verdankt die Mechanik dem großen niederländischen Mathematiker Simon Stevin (1548—1620), der das Gesetz des Gleichgewichtes auf der schiefen Ebene und das hydrostatische Paradoxon entdeckte und Untersuchungen über die Stabilität schwimmender Schiffe und über den Seitendruck der Flüssigkeiten anstellte, wobei er sich infinitesimaler Zerlegung der Seitenwand bediente.

Als gewandten Geometer erkennen wir François Viète (1540—1603), den größten französischen Mathematiker des 16. Jahrh., aus seinen 1593 gedruckten Werken: „Effectionum geometricarum canonica recensio" und „Supplementum geometriae". Das erstere ist eine algebraische Geometrie, d. h. eine Zusammenstellung der Konstruktionen, durch die man gewisse Rechnungsaufgaben geometrisch lösen kann. Das zweite Werk behandelt Aufgaben, die nicht mehr mit Zirkel und Lineal, sondern durch verschiedene Kurven lösbar sind. Hier

findet sich als allgemeines Ergebnis der bedeutungsvolle Satz, daß jede kubische oder biquadratische Gleichung, wenn sie sonst nicht lösbar sei, dadurch gelöst werde, daß man sie entweder auf die Einschiebung zweier mittlerer Proportionalen oder auf eine Winkeldreiteilung zurückführe. Viète ist auch der eigentliche Entdecker der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise, wenn er auch die Anregung dazu aus Pappus, der 1588 durch Commandinus herausgegeben worden war, erhalten haben dürfte. In seinen „Vermischten Aufgaben" von 1593 ist der Kosinussatz ausgesprochen, ferner zum ersten Male das reziproke Dreieck eines sphärischen Dreiecks erwähnt. Das Bestehen polarer Beziehungen zwischen je zwei Sätzen der Sphärik, sogar die allgemeine Gültigkeit des Dualitätsprinzips, das im 19. Jahrh. ein Hauptwerkzeug der synthetischen Geometrie wurde, erkannte er mit voller Klarheit.

Im selben Jahre stellte Adriaen van Roomen (Adrianus Romanus 1561—1615) eine öffentliche Aufgabe, deren Lösung auf eine Gleichung 45. Grades führte. Viète ließ die Lösung schon 1594 im Drucke erscheinen. Sowohl der, der diese Aufgabe stellte, als auch der, der sie löste, mußte wissen, wie die Sehne des m-fachen Bogens aus der des einfachen gebildet werden kann. Viète ging aber noch weit darüber hinaus. Er begnügte sich nicht mit der einen von van Roomen berechneten Wurzel, sondern gab alle 23 positiven Wurzelwerte. (Negative Gleichungswurzeln wurden auch damals noch nicht gezählt.)

Auch von anderer Seite fand im 16. Jahrh. die Trigonometrie eifrige Pflege. Nikolaus Kopernikus (1473 bis 1543), der seinem unsterblichen Werke „De revolutionibus" einen kurzen Lehrgang der Trigonometrie

einverleibte und der auch die Funktion Sekante in die Wissenschaft einführte, hatte als Schüler Georg Joachim Rhäticus (1514—1576), den Verfasser des großartigsten trigonometrischen Tabellenwerkes, in dem Sinus, Tangente und Sekante der um 10″ zunehmenden Winkel auf 10 Dezimalstellen berechnet waren. Es wurde 1596 von Valentin Otho als „Opus Palatinum de triangulis" herausgegeben und enthielt auch eine vollständige ebene und sphärische Trigonometrie, in welch letzterer besonders die Unterscheidung der doppeldeutigen Fälle zu erwähnen ist. Noch genauere von Rhäticus verfaßte Tabellen, den „großen Kanon", gab Bartholomäus Pitiscus (1561—1613), der Urheber des Terminus „Trigonometrie", 1613 unter dem Titel „Thesaurus mathematicus" heraus.

Ein vielumworbenes Spezialgebiet bildete zu jener Zeit die Kreisrechnung. Viète setzte das Verfahren des Antiphon in Rechnung um und gelangte auf einen Wert für $\frac{2}{\pi}$, der das erste unendliche Produkt ist, das aufgestellt wurde. Im „Canon mathematicus" hat er π auf 10 Stellen richtig berechnet. Adrianus Romanus entwickelte π auf 15 Stellen und Ludolf van Ceulen (1540—1610) auf 20, 32 und schließlich auf 35 Stellen. Erwähnenswert ist der von Adriaen Metius (1571—1635) berechnete Wert $\pi = \frac{355}{113}$ wegen der vortrefflichen Annäherung bei vergleichsweise kleinen Verhältniszahlen.

Als bedeutende Algebraiker in der zweiten Hälfte des 16. Jahrh. sind Rafaele Bombelli und Stevin zu nennen. Ersterer stellte in dem 1572 veröffentlichten Werke „l'Algebra" die Wurzeln der kubischen Gleichung im irreduziblen Falle durch Umformung der Irrationalitäten in der einfachsten Form dar. Zu diesem Zwecke machte er bereits umfassenden Gebrauch vom Rechnen mit imaginären Zahlen, wozu er Cardano einige Anregung verdankte. Hier lehrte er auch das Ausziehen der

Quadratwurzel nach der Kettenbruchmethode an einem Beispiele.

Im Anschlusse an Bombelli verwendete *Stevin* bei Bezeichnung der Potenzen der Unbekannten eingeringelte Zahlen, wobei auch der richtige Begriff der eingeringelten Null und eines eingeringelten Bruches nicht fehlt; so wäre z. B. ein eingeringeltes $\frac{2}{3}$ das Symbol für die Kubikwurzel aus dem Quadrate der Unbekannten. Er versteht auch das größte gemeinsame Maß zweier Polynomien (multinomie algebrique nennt er sie) zu finden, in der Absicht, gemeinschaftliche Faktoren aus den Gleichungen wegzulassen und dadurch der Lösung höherer Gleichungen näher zu kommen.

Der größte Algebraiker seiner Zeit war *Viète*, auf den die eigentliche Theorie der algebraischen Gleichungen vorzüglich zurückgeht. Sein größtes Verdienst ist die Erfindung der *Buchstabenrechnung*. Nicht als ob vor ihm überhaupt keine allgemeinen Buchstabengrößen gebraucht worden wären, aber die ausschließliche und folgerichtige Verwendung haben wir ihm zu verdanken. In den 1591 erschienenen Werke „In artem analyticam isagoge“ spricht er das Gesetz der Homogeneität aus, vermöge dessen nur Längen mit Längen, Flächen mit Flächen, Körper mit Körpern, Verhältnisse mit Verhältnissen verglichen werden können — ein Gesetz, das den griechischen Mathematikern der klassischen Zeit als selbstverständlich galt, von Heron, Diophant u. a. aber nicht mehr befolgt wurde. In der Logistica speciosa (allgemeinen Arithmetik) führt nun Viète dieses Prinzip für die Buchstabenrechnung durch. Die großen Buchstaben des lateinischen Alphabets, die er dabei verwendet, stellen Gebilde vor, die dem Gesetze der Homogeneität unterworfen sind. Es sind Größen, nicht Zahlen — aller-

dings nicht mehr geometrische Größen, da die in einer Gleichung auftretenden Glieder fast beliebig hoher Dimension sein können, wenn sie nur alle gleich hoher Dimension sind. Die gesuchten Größen werden durch die Vokale *A*, *E*, *J*, O, *V*, *Y* dargestellt, die gegebenen durch die Konsonanten *B*, *C*, *D* usw. Er bezeichnete also mit Buchstaben nicht nur die unbekannten Größen, sondern auch solche, denen man in der gerade vorliegenden Untersuchung irgend einen Zahlenwert beilegen konnte. So begründete er eine wirkliche Buchstabenrechnung, die alle Rechnungen umfaßt, die man durch Einsetzen aller möglichen Werte für die Buchstaben erhielte.

In den „Anmerkungen zur Logistica speciosa" behandelt Viète unter anderem die Bildung rationaler rechtwinkliger Dreiecke auseinander, und zwar ganz allgemein durch Zusammensetzung von $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ aus $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$. Eine Anwendung davon macht er zur Lösung der Gleichung dritten Grades im irreduziblen Falle, die er auf eine Winkeldreiteilung zurückführt.

Als Hauptergebnis seiner mathematischen Untersuchungen gibt er selbst die Zusammensetzung von Gleichungen aus linearen Faktoren und die Darstellung der Koeffizienten durch die Wurzeln an. Da er nur positive Wurzeln anerkennt, so wendet er allerdings diese Kenntnis zunächst nur auf Gleichungen mit lauter solchen Lösungen an; doch ist es wahrscheinlich, daß er in einem verloren gegangenen Werke auch für Gleichungen, die negative Wurzeln besitzen, die Bildung der Koeffizienten darlegte.

In einer 1600 gedruckten Abhandlung finden wir eine Näherungsmethode zur Auflösung algebraischer Gleichungen beliebigen Grades, die Ähnlichkeit mit dem Wurzel-

ausziehen hat. Wenn auch das Verfahren für Gleichungen verschiedener Grade sich ändert und nur auf die Berechnung einer (positiven) Wurzel abzielt, ist es doch für die Zukunft von grundlegender Bedeutung geworden und übertrifft die „goldene Regel" des Cardano und die Methode Stevins.

Die glänzenden Erfolge, die das Genie Viètes aus der glücklichen Verbindung der Algebra mit der Trigonometrie in beiden Disziplinen errang, wurden vermehrt durch den Schweizer Mathematiker Joost Bürgi (1552 bis 1632), der zuerst erkannte, daß die übrigen Wurzeln der zur Berechnung der Seite eines regelmäßigen Vielecks dienenden Gleichung durch die Diagonalen gegeben sind.

Eine für das praktische Rechnen höchst wichtige Vereinfachung gelangte durch die großen Mathematiker Viète, Stevin, Bürgi zum vollständigen Durchbruche, die Einführung der Dezimalbrüche. Viète unterschied zuerst die folgenden Ziffern von der an der Spitze stehenden Null durch kleinere Typen, dann durch einen vertikalen Strich (im Canon mathematicus 1579). Von ihm unabhängig gelangte Bürgi, der sich zuerst eines Punktes zur Abgrenzung von Dezimalstellen bediente, zu der gleichen Vereinfachung. Er lehrte auch schon die abgekürzte Multiplikation. Stevin sprach in seiner Abhandlung „La Disme" (1585) klar den Gedanken aus, alle Rechnungen des Geschäftslebens ohne Brüche, nur mittels ganzer Zahlen auszuführen.

2. XVII. Jahrhundert.

Die wissenschaftliche Mechanik, die wir in Italien entstehen sahen, nahm in diesem Lande einen außerordentlichen Aufschwung durch Galileo Galilei (1564 bis 1642), der in seinen „Discorsi e demostrazioni

matematiche intorno a due nuove scienze“ die Bewegungslehre begründete. Die in dem neuen Gebiete notwendigen Untersuchungen waren vornehmlich infinitesimaler Natur und wirkten so intensiv auf die Mathematik zurück, daß der Begriff der Bewegung in dieselbe eindrang und zur Klärung des Begriffes der Stetigkeit vieles beitrug — eine Erscheinung, die besonders in den Formen hervortritt, unter denen sich die Infinitesimalrechnung in England entwickelte.

Galileis hervorragendster Schüler, Evangelista Torricelli (1608—1647), gab 1644 ein mathematisches Sammelwerk „Opera geometrica“ heraus, in dem er die Tangente an die Parabel mit Hilfe des Parallelogrammes der Bewegungen konstruierte. Hier finden wir auch zuerst den Begriff der einhüllenden Kurve angedeutet, ferner die Rektifikation der logarithmischen Spirale.

Als bedeutenden Geometer haben wir noch einen anderen Schüler Galileis zu nennen, Vincenzo Viviani (1622—1703), der aus den wenigen vorhandenen Andeutungen die Wiederherstellung des 5. Buches der Kegelschnitte des Apollonius versuchte, die durch das bald darauf wiedergefundene Werk glänzend bestätigt wurde.

Ein anderer dem Galileischen Kreise angehöriger Mathematiker ist Bonaventura Cavalieri (1591? bis 1647), der 1632 die Entdeckung Galileis, daß die Falllinie eine Parabel sei, veröffentlichte. Auch die Formel für den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks machte er in einem gleichzeitig gedruckten Werke bekannt. Sein Hauptwerk: „Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota“ erschien 1635, verbessert 1653. Die Hauptsätze sind: Ebene Figuren oder auch Körper stehen in demselben Verhältnisse wie die

Gesamtheit ihrer parallelen Geraden oder Ebenen; ferner: Ebene Figuren wie Körper sind gleich, wenn in gleicher Höhe geführte Schnitte gleiche Strecken bzw. gleiche Flächen ergeben. Bei aller Unklarheit, die dem Begriffe der Indivisibilien anhaftet, treten doch hier zum ersten Male die Ideen der Differential- und Integralrechnung deutlich hervor.

In den einfachsten Fällen liefert Cavalieris Methode folgende Ergebnisse. Für das Parallelogramm sind die unteilbaren Größen Parallele zur Grundlinie; ihre Anzahl ist proportional der Höhe. Daher ist die Maßzahl der Fläche eines Parallelogrammes das Produkt aus den Maßzahlen der Grundlinie und Höhe. Der entsprechende Schluß gilt für das Prisma. Um ein Dreieck mit dem Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe zu vergleichen, zerlegt man wieder die Flächen in Indivisibilien durch Parallele zur Grundlinie. Die Indivisibilien des Dreiecks sind 1, 2, 3, ..., n, die des Parallelogrammes n, n, ..., n, also das Verhältnis

$$\frac{\text{Dreieck}}{\text{Parallelogramm}} = \frac{1+2+\ldots+n}{n\cdot n} = \frac{n(n+1)}{2\,n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

woraus für $n = \infty$ der Wert $\frac{1}{2}$ folgt. Ebenso erhält man für die entsprechenden Körper

$$\frac{\text{Pyramide}}{\text{Prisma}} = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2\,n+1)}{6\,n^3}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),$$

woraus für $n = \infty$ der Wert $\frac{1}{3}$ folgt.

Cavalieri war ohne Zweifel beeinflußt von dem großen Johannes Kepler (1571—1630), dessen 1615 gedruckte „Stereometria doliorum“ (Fässermessung) die Grundlage aller späteren Kubaturen geworden ist. Dieses Werk besteht aus drei Teilen, deren erster im Anschlusse an Archimedes die Rauminhalte von 92 Umdrehungskörpern finden lehrt, von denen einige nach Früchten benannt werden, so der apfelförmige, der zitronenförmige, der

olivenförmige Körper. Kepler gelangt zur Körpermessung von der Flächenmessung aus. Die Kreisperipherie hat so viele Teile als Punkte, also unendlich viele. Jedes Teilchen ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Scheitel der Mittelpunkt des Kreises ist. Ein einziges Dreieck mit der Peripherie als Basis und dem Radius als Höhe besitzt demnach alle jene Dreiecksgrundlinien aneinandergefügt, und über jeder derselben gibt es ein Dreieck mit dem Scheitel als Spitze, das einem jener früheren Dreiecke gleich ist; folglich ist das ganze Dreieck gleich der ganzen Kreisfläche. Durch Analogieschlüsse geht nun Kepler zu den Körpern über. Der zweite Teil des Werkes untersucht die zweckmäßigste Faßgestalt, die bei Verbrauch der geringsten Menge Holz den größten Inhalt besitzt. Infolgedessen handeln die meisten Sätze über Maxima und Minima, in deren Wesen Kepler so tief eindrang, daß er das Verschwinden der Veränderungen einer Funktion dicht beim Maximalwerte erkannte.

In der „Astronomia nova" von 1609 stellte Kepler eine Untersuchung an, die zur Auswertung des bestimmten Integrals $\int_0^{\varphi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 1 - \cos\varphi$ führt. In der „Harmonice mundi" behandelte Kepler zum erstenmal Sternvielflächner; ferner führte er den Begriff des Krümmungskreises in die Geometrie ein und die unendlich fernen Gebilde, indem er für die Parabel einen blinden Brennpunkt aufstellte, der unendlich weit von dem ersten auf der Achse entfernt sei, so daß die zu ihm hin gezogenen Geraden zur Achse parallel seien.

Wie die astronomischen Entdeckungen, die Keplers Namen unsterblich machten, beweisen auch seine mathe-

matischen Leistungen eine wunderbare Vereinigung wahrhaft dichterischer Phantasie mit der klarsten mathematischen Einsicht. Infolge letzterer verschmähte er es auch nicht, den Erleichterungen des praktischen Rechnens seine Aufmerksamkeit zu schenken, die am Anfange des 17. Jahrh. erfunden wurden, den Logarithmen.

Die erste Erfindung der Logarithmen dürfte Bürgi zuzuschreiben sein, während der Ruhm der Verbreitung und allgemeinen Nutzbarmachung derselben unbestritten dem Lord Napier zukommt. Bürgi, dessen Verdienste für die Anwendung der Algebra auf die Trigonometrie und die Einführung der Dezimalbrüche schon erwähnt wurden, war einer der erfindungsreichsten Rechner. Ausgehend von zwei zusammengehörigen Reihen, einer arithmetischen und einer geometrischen, verfertigte er zwischen 1603 und 1611 eine Tafel der roten und schwarzen Zahlen, deren erstere die Zahlen der arithmetischen Reihe (Logarithmen), letztere die der geometrischen Reihe (Zahlen) darstellten. Die Tafel ist doppelten Einganges und nach den roten Zahlen geordnet, daher in Wirklichkeit eine antilogarithmische Tafel. Trotz Keplers Aufforderung kam aber Bürgi nicht dazu, seine Tafel in Druck zu geben. Dies geschah erst 1620 unter dem Titel: „Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verstanden werden soll.“ Noch dazu dürfte dieser „gründliche Unterricht“ gar nicht gedruckt worden sein (erst 1856 nach einer Handschrift).

Inzwischen erschien 1614 die „Descriptio mirifici logarithmorum canonis“ des Lord John Napier (Neperus, 1550—1617), der 1619 nach dem Tode des Verfassers die schon vor der „Descriptio“ ausgearbeitete „Constructio“

folgte. Napier geht aus von der Bewegung zweier Punkte. Der erste bewegt sich gleichförmig, und die von ihm zurückgelegten Wege bilden die arithmetische Reihe der Logarithmen; der zweite bewegt sich gleichzeitig, aber so, daß er in der 1. Zeiteinheit $\frac{1}{m}$ des ganzen Weges, in der 2. Zeiteinheit $\frac{1}{m}$ des noch übrigen Weges usw. durchläuft (durchfließt, sagt Napier). So entsteht die fallende geometrische Reihe der Zahlen. Während also die Logarithmen wachsen, nehmen die Zahlen ab. Sowohl bei Bürgi als auch bei Napier gibt jedes Glied der arithmetischen die gesuchte Nummer des entsprechenden Gliedes (Verhältnisses) in der geometrischen Reihe, daher der Name „Logarithmus" (λόγων ἀριθμός). Als Basis des ursprünglichen Napierschen Systems ergibt sich annähernd $\frac{1}{e}$. Später setzte Napier den $\log 10 = 1$ und ließ somit Logarithmen und Zahlen gleichzeitig wachsen. Dies geschah unter dem Einflusse des Henry Briggs (1556—1630), der die Logarithmen der Zahlen 1 bis 20 000 und 90 000 bis 100 000 berechnete. Die Berechnung der übrigen Logarithmen besorgte Adriaen Vlack. In Deutschland fanden die Napierschen Logarithmen eifrige Verbreiter in Benjamin Ursinus (1587 bis 1634?) und besonders in Kepler, der sie auch in seinen 1627 herausgegebenen Rudolfinischen Tafeln benutzte.

Hervorzuheben sind noch die Leistungen Napiers auf dem Gebiete der sphärischen Trigonometrie erstlich durch die Zusammenfassung aller Fälle des rechtwinkligen Dreiecks in eine Regel und zweitens durch Aufstellung der ersten zwei der nach ihm benannten Analogien:

$$\frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\sin(\gamma-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sin(\gamma+\alpha)\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}=\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{c+a}{2},$$

$$\frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}\frac{c-a}{2}.$$

Die vereinfachte Form der ersten Gleichung und die beiden Polarformeln zu diesen stammen von Briggs her.

Auf dem Felde beider Trigonometrien arbeitete sehr erfolgreich Willibrord Snellius (1581—1626), der bereits 1614 die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens (später fälschlich „Pothenotsche Aufgabe" genannt) und die „Hansensche Aufgabe" vollständig erledigte. Außer der schon Nikolaus von Cusa bekannten Gleichung $x=\frac{3\sin x}{2+\cos x}$ gibt er für x auch noch eine obere Grenze $\operatorname{tg}\frac{x}{3}+2\sin\frac{x}{3}$ an. Noch weit schwieriger war die von Kepler gestellte Aufgabe, von einem Punkte des Durchmessers eine Gerade zu ziehen, die den Halbkreis im Verhältnisse $m:n$ teilt. Albert Girard (1590—1632) führte in die Trigonometrie manche bequeme Bezeichnungen ein und gab zuerst die sphärische Flächenformel in der 1629 gedruckten „Invention nouvelle en l'algèbre".

Die eigentliche Bedeutung des letztgenannten Werkes liegt aber, seinem Titel entsprechend, im algebraischen Inhalte. Wenn auch nicht neu, so doch viel klarer als früher, sind Girards Kenntnisse von den negativen und imaginären Gleichungswurzeln. Er weiß, daß jede Glei-

chung so viele Wurzeln hat, als ihr Grad anzeigt, und daß die Koeffizienten aus den Kombinationen der Wurzeln sich darstellen lassen. Völlig neu ist die Berechnung symmetrischer Funktionen der Gleichungswurzeln (bis zur 4. Potenz) aus den Koeffizienten. Thomas Harriot (1560—1621) führte in seinem Werke „Artis analyticae praxis", das erst 1631 gedruckt wurde, das Zeichen für „größer" und „kleiner" ($\gtrless$) ein. Er bediente sich auch konsequent des von Robert Recorde 1556 eingeführten Gleichheitszeichens (=) und stellte die Gleichungen in übersichtlicher Form dar (aequatio canonica).

Die 1637 gedruckte, epochemachende „Géométrie" des René Descartes (Cartesius 1596—1650) wurde auch in der Algebra bahnbrechend. Die Anwendung der Buchstaben x, y, z für die Unbekannten, die heute noch übliche Potenzbezeichnung, die termini „reell" und „imaginär" stammen aus diesem Werke. Descartes lehrt, daß eine Gleichung so viele Wurzeln haben kann, als sie Dimensionen hat; aber es komme oft vor, daß einige von diesen Wurzeln negativ (falsae) sind. Sowohl die positiven (verae) als auch die negativen Wurzeln seien nicht immer reell, sondern manchmal nur imaginär. Weitaus am bedeutendsten aber ist die Zeichenregel: Eine Gleichung kann so viele positive Wurzeln besitzen, als das Gleichungspolynom Zeichenwechsel aufweist, und so viele negative, als das Gleichungspolynom Zeichenfolgen hat. Zur Auflösung der Gleichungen bediente er sich der Zerlegung des Gleichungspolynoms in Faktoren — eine Methode, mit der sich auch Florimond Debeaune (1601—1652) und Franz van Schooten (1615—1660) in ihren Erläuterungen zu Descartes' Geometrie beschäftigten. Letzterer, der sich durch die Herausgabe der Werke Viètes und einer lateinischen Übersetzung

von Descartes' Geometrie große Verdienste erwarb, gab dabei eine der ersten Anwendungen der von Descartes erfundenen Methode der unbestimmten Koeffizienten. Debeaune ist auch der Verfasser einer Schrift über die ganze neue Frage nach leicht bestimmbaren Grenzen, zwischen denen die Gleichungswurzel liegt. Mit der Aufgabe, eine Gleichung als Produkt mehrerer Gleichungen niedrigeren Grades darzustellen, beschäftigte sich ferner Johann Hudde (1624—1704) in einem 1657 geschriebenen Briefe, wo er auch die Regel aufstellte, wie man entscheiden könne, ob eine Gleichung gleiche Wurzeln besitze. Hier wird auch zum ersten Male durch denselben Buchstaben sowohl ein positiver als auch ein negativer Zahlwert bezeichnet. Ihm verdanken wir auch die einfachste und übersichtlichste Ableitung der Cardanischen Formel.

Zwei bedeutsame Aufgaben der Algebra behandelte Pierre de Fermat (1601—1665), der größte Mathematiker, den Frankreich hervorgebracht hat. Er behandelte das Rationalmachen von Gleichungen und führte es zurück auf die Elimination von $n - 1$ Unbekannten aus n Gleichungen höheren Grades.

Noch viel hervorragendere Verdienste erwarb sich Fermat in der Zahlentheorie. Auf diesem Gebiete hatte Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1587 bis 1638) ganz neue Bahnen eröffnet durch seine mit lateinischer Übersetzung und Anmerkungen versehene Ausgabe des griechischen Textes des Diophant (1621). Hier und in der 1624 erschienen 2. Auflage der „Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres" (1. Aufl. 1612) hatte er eine vollständige Theorie der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades gegeben. Über Diophant hinausgehend verlangte er ganzzahlige Lö-

sungen und entwickelte auch eine allerdings etwas umständliche Auflösungsmethode, da die Kettenbrüche und ihre Eigenschaften damals noch nicht genügend bekannt waren.

Kettenbruchartige Entwicklungen hatten wir zwar seit den Griechen wiederholt zu erwähnen, aber eine wirkliche Kettenbruchbezeichnung gab erst Pietro Antonio Cataldi, der 1613 die Quadratwurzelausziehung mittels eines unendlichen Kettenbruches lehrte. Unabhängig von ihm schuf Daniel Schwenter (1585—1636) die Grundlage der ganzen Lehre von den Kettenbrüchen mit dem Zähler 1, die später (1703) von Christian Huygens entwickelt wurde.

Die „Problèmes plaisans ...“ blieben bis in unsere Zeit Quelle für Unterhaltungs-Mathematik, und es war ein, wie der Erfolg zeigte, glücklicher Gedanke, in neuester Zeit weitere Auflagen des alten Werkes zu veranstalten.

Bachets Diophant übte auf Fermat eine mächtige Wirkung aus, die sich darin äußerte, daß er sein Handexemplar mit Randbemerkungen füllte, die dann 1670 veröffentlicht wurden. Andere zahlentheoretische Sätze finden wir in den „Opera varia“ (1679) und im „Commercium epistolicum“ (1658). Solche Sätze sind z. B.: „Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein irgend eine Potenz außer dem Quadrate in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen.“ (Der Beweis dieses Satzes, den Fermat nach seiner Behauptung besaß, ist nicht erhalten, und es gelang bisher nicht, einen allgemeinen Beweis zu erbringen.) „Jede Zahl ist entweder eine Dreieckszahl oder die Summe von zwei oder drei Dreieckszahlen, entweder eine Quadratzahl oder die Summe von zwei, drei oder vier Quadratzahlen, entweder eine Fünfeckszahl oder die Summe von zwei, drei, vier oder fünf Fünfeckszahlen usw.“ „Jede Primzahl p, die kein Teiler von a ist, teilt $a^{p-1} - 1$.“ 1657 legte

Fermat allen Mathematikern die Aufgabe vor, $a x^2 + 1 = y^2$ in ganzen Zahlen zu lösen, wenn a eine gegebene ganze Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist (die später sogenannte Pellsche Gleichung). Ist es auch Fermat nicht gelungen, eine zusammenhängende Zahlentheorie zu schaffen, so kommt ihm doch das Verdienst zu, ein Gebiet der Wissenschaft von neuem eröffnet zu haben, das seitdem eine so bedeutende Entwicklung gewonnen hat.

Mit zahlentheoretischen Studien beschäftigte sich auch Blaise Pascal (1623—1662); von noch viel größerer Bedeutung aber sind seine Leistungen in der Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung, die in dem „Traité du triangle arithmétique", der 1665 in den Buchhandel kam, enthalten sind. Das arithmetische Dreieck ist eine Tafel der Binomialkoeffizienten in übersichtlicher Anordnung zur Auffindung höherer arithmetischer Reihen und der Kombinationszahlen. Besonders wichtig ist seine Anwendung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, zu der Pascal durch zwei Aufgaben eines Freundes veranlaßt wurde, deren erste fragte, ob es vorteilhaft sei zu wetten, daß man in einer gewissen Anzahl von Würfen mit zwei Würfeln den Sechserpasch werfen werde, während die zweite zu wissen verlangte, wie man die Einsätze verteilen solle, wenn man ein Spiel unterbrechen müsse, das auf eine gewisse Anzahl gewonnener Einzelspiele gerichtet sei. Auf Einladung Pascals wendete auch Fermat diesen Fragen seine Aufmerksamkeit zu und verwendete die Kombinationslehre in dem neuen Gebiete. Weiter ist auch Bernard Frénicle de Bessy (ca. 1605—1670) als eifriger Schriftsteller auf dem Gebiete der Kombinationslehre und Zahlentheorie zu nennen. Dem Beispiele der französischen Mathematiker schloß sich unverweilt auch Huygens an, der

1657 ein kleines Werk „über das Würfelspiel" veröffentlichte. Der erste, welcher die neue Disziplin auf die ökonomischen Wissenschaften anwendete, war Jan de Witt (1625—1672), der 1671 über die Art berichtete, wie man die Höhe einer Lebensrente auf Grund einer Sterblichkeitstabelle zu bestimmen habe. Auch Hudde machte Veröffentlichungen über diesen Gegenstand. Die ersten Sterblichkeitstabellen, welche für die gegen Ende des Jahrhunderts entstehenden Versicherungsinstitute von besonderer Wichtigkeit wurden, berechnete Halley (1693).

Claude Mydorge (1585—1647) verfaßte ein Werk über Kegelschnitte, das zwar im wesentlichen noch den von Apollonius betretenen Bahnen folgt, aber durch manches Neue und besonders durch die übersichtliche Form ausgezeichnet ist. Ganz neue und umfassende Gesichtspunkte hat man dagegen Girard Desargues (1593—1662) zu verdanken, der seinen Untersuchungen, besonders über die Kegelschnitte, die systematische Anwendung der Perspektive zugrunde legte. Er ist der Begründer jener Disziplin, die 150 Jahre später den Namen der „deskriptiven Geometrie" erhielt. Sein wichtigstes Werk handelt über die Kegelschnitte (1639). Hier finden wir die konsequente Anwendung der unendlich fernen Gebilde, das harmonische Doppelverhältnis (unter dem Namen „Involution" von vier Punkten oder Strahlen), die perspektivische Beweisführung, die Behandlung der Kegelschnitte überhaupt (nicht jedes einzelnen im besonderen). Desargues faßte die Kegelschnitte als verschiedene Gestalten derselben Kurvengattung auf und stellte allgemein für alle geltende Sätze auf. Er nahm auch die Richtungen der Schnitte als ganz willkürlich, während Apollonius zuerst einen zur Grundfläche nor-

malen Achsenschnitt annahm und dann die Schnitte normal zu diesem ausführte. Auch der berühmte nach Desargues benannte Satz ist hier ausgesprochen.

Desargues' Gedanken fielen jedoch auf keinen fruchtbaren Boden, ihre Weiterführung blieb einer späteren Zeit vorbehalten. Den Praktikern war seine Darstellung zu schwierig und fremdartig, die Theoretiker aber wendeten ihre Aufmerksamkeit vielmehr der damals entstehenden analytischen Geometrie zu. Nur Pascal verstand Desargues' Leistungen so vollkommen, daß er sogleich weitere Fortschritte zu machen imstande war. Schon im Alter von 16 Jahren verfaßte er eine Schrift über die Kegelschnitte, die den bekannten Satz vom „Pascalschen Sechseck" (von Pascal selbst „Hexagramma mysticum" genannt) enthielt. Er benutzte dasselbe, um die Eigenschaften von Tangenten- und Sehnenvierecken der Kegelschnitte sowie dabei auftretende harmonische Teilungen und Durchmessereigenschaften herzuleiten. Pascal ist auch der Verfasser einer Abhandlung über die Methode der geometrischen Beweisführung, des ersten modernen Versuches einer Philosophie der Mathematik.

Ein bedeutender Geometer, der ebenfalls die Perspektive auf die Kegelschnitte anwendete, ohne sich jedoch in demselben Grade wie Desargues von den alten Methoden zu befreien, war noch Philippe de Lahire (1640—1718), dessen Hauptwerk „Sectiones conicae" 1685 erschien. Hier treffen wir zum ersten Male den Namen „Harmonikale", ferner den Beweis, daß sich die Berührungssehnen in einem Punkte schneiden, wenn die Ausgangspunkte der Tangentenpaare auf einer Geraden liegen, dann die Konstruktion des vierten harmonischen Elementes aus drei gegebenen mit Hilfe des vollständigen Vierseits und Vierecks. Die Methoden von de Lahire

und Poivre, die Kegelschnitte als Projektionen des Kreises, der als Basis des Projektionskegels dient, zu behandeln, wurden im 19. Jahrh. durch Poncelet zur Theorie der Homologie ausgebildet. 1694 veröffentlichte de Lahire eine Abhandlung über die Epizykloide.

Erwähnenswert ist auch seine allgemeine Methode zur Bildung magischer Quadrate (1705), nachdem schon Bachet, Fermat, Frénicle sich mit diesem Gegenstande beschäftigt hatten.

Die analytische Geometrie, die in der ersten Hälfte des 17. Jahrh. entstand, verdankt ihren Ursprung den zwei größten französischen Mathematikern, Descartes und Fermat. Verschiedene Schriftsteller zeigten das Bestreben, bald die Geometrie der Algebra, bald die Algebra der Geometrie dienstbar zu machen, aber sie kamen nicht über die Konstruktion von Strecken hinaus, die sich in den Gleichungen als Unbekannte befanden. So Girard, van Schooten, de Sluse und Marino Ghetaldi aus Ragusa (1566—1627). Der letztere kam in seinem nachgelassenen, 1630 gedruckten Werke „De resolutione et compositione mathematica“ dem neuen Gebiete am nächsten. Den entscheidenden Schritt aber machte erst Descartes in seiner „Géométrie“ von 1637. Der algebraische Inhalt dieses Werkes wurde schon oben skizziert, der geometrische besteht aus der analytischen Geometrie der Ebene und einem Hinweise auf die analytische Geometrie des Raumes. Doch bietet er nicht etwa einen Lehrgang der analytischen Geometrie dar, sondern nur einen kurzen Abriß, der die Grundlagen dieser Disziplin in großen Zügen andeutet. Descartes definierte die Bedeutung der Algebra für die Geometrie dahin, daß die Grundoperationen der Arithmetik sich auch in der Geometrie verwenden lassen. Wie schon

Apollonius Punkte eines Kegelschnittes durch parallele Sehnen und ihre in der Richtung des konjugierten Durchmessers gezogenen Abstände von einer demselben System angehörigen Tangente bestimmte, so ist auch bei Descartes jeder Punkt einer Kurve der Schnitt zweier Geraden. Aber er trennt diese Systeme paralleler Geraden ganz von den Kurven und weist ihnen eine selbständige Existenz zu. Die fundamentalen Elemente zur Bestimmung eines Punktes sind seine Koordinaten, die er mit x, y oder z bezeichnet und „Unbekannte“ oder „Wurzeln“ nennt. (Die Namen Abszisse und Ordinate kommen erst allenthalben bei Leibniz vor, der auch für beide 1692 den Namen Koordinaten einführte.) Descartes und seine Zeitgenossen beschränkten sich auf zwei Koordinaten. Bei doppelt gekrümmten Kurven bediente er sich ihrer Projektionen auf zwei Ebenen. Aber die Darstellung räumlicher Gebilde durch Gleichungen mit drei veränderlichen Koordinaten treffen wir erst bei Parent (1700), Clairaut (1731) und Euler (1748).

Nach seiner eigenen Aussage verdankt Descartes die erste Anregung zu seinen geometrischen Untersuchungen der Aufgabe des Pappus, den Ort zu drei, vier oder mehreren Geraden zu finden. Kein Beispiel hätte die Vorzüge der neuen Methode besser zeigen können als dieses. Für den Fall von drei Geraden bezeichnet Descartes einen Abstand mit y, den Abstand des Fußpunktes von einem festen Punkte der zugehörigen Geraden mit x und beweist, daß jede andere gesuchte Strecke leicht konstruiert werden kann. Läßt man ferner y nach und nach um unendlich wenig wachsen, so wächst auch x um unendlich wenig, und man erhält auf diese Weise unendlich viele Punkte des betreffenden Ortes. Die Unterscheidung der Kurven in zwei Klassen, die

später (1686) von Leibniz algebraische und transzendente genannt wurden, ist Descartes geläufig. (Er nennt sie geometrisch und mechanisch.) Er fordert auch die Einteilung der ersteren nach dem Grade und faßt deren je zwei zu einem „genus“ zusammen. (Erst Newton nannte eine Kurve, die durch eine algebraische Gleichung n-ten Grades zwischen ihren Parallelkoordinaten bestimmt ist, eine Linie n-ter Ordnung oder auch [$n - 1$]-ter Gattung.) Eine unmittelbare Folge der Cartesianischen Koordinaten war die Zulassung negativer Zahlen. Sie hatten jetzt reale Bedeutung erhalten, da sie durch Strecken dargestellt werden konnten.

Schon vor dem Erscheinen der „Géométrie“, spätestens 1629, war Fermat im Besitze einer analytisch-geometrischen Methode, wie aus Briefen hervorgeht; veröffentlicht freilich hat er seine Untersuchungen erst später. Dieselben gehen in wesentlichen Dingen weit über Descartes hinaus. Die Herstellung der Gleichung eines geometrischen Ortes wird mit einer Klarheit beschrieben, die wir bei Descartes vergeblich suchen. Die Gleichungen können nach Fermat hergestellt werden, wenn man zwei unbekannte Strecken unter gegebenem Winkel, meistens einem rechten, aneinandersetzt und für eine der beiden Strecken einen Anfangspunkt wählt. Die Bedeutung seines methodischen Verfahrens wird erhöht durch ein für allemal gewählte Buchstaben zur Bezeichnung gewisser Punkte und Strecken. Außer den Gleichungen der Kegelschnitte in verschiedenen Formen besitzt Fermat ausdrücklich die Gleichung der Geraden. In einer bedeutend später, etwa 1660 entstandenen Abhandlung wendet er sich gegen Descartes, der nicht erkannte, daß zwei Kurven, von denen die eine vom m-ten, die andere vom n-ten Grade ist, genügen, um

eine Gleichung vom mn-ten Grade zu lösen. Dagegen machte Fermat keinen Versuch, die analytische Geometrie auf den Raum auszudehnen.

Die Vorteile, welche die analytische Geometrie darbot, kamen weniger der elementaren Geometrie zustatten, als vielmehr der höheren Kurvenlehre, indem sie sich in natürlicher Gegenseitigkeit mit infinitesimalen Betrachtungen verband.

Derartige Betrachtungen hatten Kepler und Cavalieri zum Zwecke von Quadraturen und Kubaturen angestellt; in Descartes' „Géométrie" treffen wir zum ersten Male die Lösung einer Aufgabe, die von nun an durch lange Zeit die Mathematiker beschäftigte, die Tangentenaufgabe. Descartes behandelt sie als Normalenaufgabe in der Weise, daß er um den auf der x-Achse gelegenen Fußpunkt der im Kurvenpunkte P errichteten Normale einen Kreis durch P beschreibt und ausdrückt, daß dieser die Kurve im Punkte P in aufeinanderfolgenden Punkten schneidet, d. h. er stellt die Bedingung auf, daß nach Elimination von x die Gleichung in y eine mehrfache Wurzel hat. In dem Briefwechsel Descartes' finden wir manche Dinge aus der höheren Kurvenlehre, Quadraturen, Kubaturen von Rotationskörpern und Tangentenkonstruktionen, auch eine inverse Tangentenaufgabe. Von den behandelten Kurven seien erwähnt Parabeln verschiedener Ordnung, die Zykloide (Roulette, Trochoide), das folium Cartesii ($x^3 + y^3 = nxy$), die logarithmische Spirale. Descartes versteht seine Aufgaben mittels genialer Kunstgriffe zu behandeln, läßt aber einen den inneren Zusammenhang umfassenden einheitlichen Gesichtspunkt vermissen.

Fermat dagegen bedient sich einer allgemeinen Methode, die er folgendermaßen beschreibt: Man setze

in dem zu einem Maximum oder Minimum zu machenden Ausdrucke statt der Unbekannten A die Summe zweier Unbekannten $A + E$ und betrachte die beiden Formen als annähernd gleich, streiche auf beiden Seiten, was zu streichen ist, und erhält dadurch lauter mit E behaftete Glieder. Dividiert man dann durch E und elidiert die E noch enthaltenden Glieder, so bleibt die Gleichung, die den Wert von A liefert, der das Maximum oder Minimum hervorbringt; d. h. nach unserer Bezeichnung: A aus der Gleichung suchen $\frac{df(A)}{dA} = 0$. Das erste Beispiel Fermats verlangt, B in zwei Teile zu teilen, so daß ihr Produkt ein Maximum wird. Nach der ersten Annahme heißen die Teile A und $B - A$, nach der zweiten Annahme $A + E$ und $B - A - E$. Man hat also $A(B-A) = (A+E)(B-A-E)$ oder $0 = E(B-2A-E)$. Nach Division durch E ist $B = 2A + E$. Nun wird E elidiert, und es ist $A = \frac{1}{2}B$. Die Mängel der Anwendung sind evident, auch fehlt jegliche Begründung, gleichwohl ist sich Fermat des Vorzuges seiner Methode vor der Cartesianischen mit Recht wohl bewußt. Dieser tritt besonders in den Tangentenkonstruktionen an die Zykloide, Zissoide, Konchoide hervor. Die hierbei angewendete Methode ist mit der für Maxima und Minima nahe verwandt. Fermat beschäftigte sich aber nicht bloß mit derartigen Anwendungen der später sogenannten Differentialrechnung, sondern auch mit solchen der Integralrechnung. Hierher gehören seine Quadraturen von Hyperbeln irgend einer Ordnung und von beliebigen Parabeln, ferner auch Rektifikationen, die er durch Zurückführung auf eine Quadratur, d. h. also durch Zurückführung eines bestimmten Integrals auf ein anderes, löste.

Giles Personnier, gewöhnlich nach seinem Geburtsorte Roberval genannt (1602—1675), vollzog die Quadratur der Zykloide mit Hilfe der etwas später als Sinuslinie erkannten Kurve. Seine bedeutendste Leistung ist aber eine Tangentenkonstruktion, bei der er das Parallelogramm der Geschwindigkeiten verwendete, indem er die Kurve durch Zusammensetzung zweier Bewegungen entstehen ließ. Zur selben Zeit (1644) veröffentlichte Torricelli seine „Opera geometrica", die eine wesentlich gleiche Methode enthalten, zu der er jedoch ganz unabhängig von Roberval gelangt war.

Einen ähnlich weitgehenden Einfluß wie das Buch Cavalieris über die „Indivisibilien" übte ein umfangreiches Werk des Gregorius a S. Vincentio (1584 bis 1667) aus, das „Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni" (1647). Trotz mancher Fehler enthält das Werk zahlreiche infinitesimale Methoden und Betrachtungen oft von ziemlicher Allgemeinheit, welche die Erfindungsgabe des Verfassers kundtun und für die weitere Entwicklung der Differential- und Integralrechnung Bedeutung erlangten.

Wie Fermat die größte Gewandtheit in der Lösung solcher Aufgaben bekundete, die auf eine Differentiation führen, so bewies sich Pascal als der größte Meister im Integrieren vor der Erfindung des eigentlichen Kalküls der Integralrechnung. 1658 setzte er öffentlich einen Preis aus auf die Lösung mehrerer Aufgaben über die Zykloide, und 1659 veröffentlichte er nicht nur die Beweise der verlangten Sätze, sondern auch die allgemeine Methode der Quadraturen oder Integrationen, von der sie Anwendungen sind. Unter anderem war er bekannt mit der sogenannten partiellen Integration, $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$, wenn er auch diesen allgemeinen Satz

in zahlreiche Einzelfälle zerlegen mußte. Pascal betont auch die Ähnlichkeit der Dreiecke *EKE* und *AID* (Fig. 7). Werden *RR* und somit auch *EE* unendlich klein, so wird auch das Dreieck *EKE* unendlich klein. Dieses Dreieck wurde das Vorbild für das „charakteristische Dreieck", das später Leibniz für eine beliebige Kurve auf dieselbe Art bildete und dessen Seiten er durch die Differentiale dx, dy und ds bezeichnete.

Mit dem ungefähr gleichzeitigen Tode Fermats, Desargues' und Pascals war die glänzendste Periode der französischen Mathematik im 17. Jahrh. vorbei, was auch dadurch bestätigt wird, daß die Leitung der 1666 gegründeten „Académie des Sciences" dem Niederländer Christian Huygens (1629—1695) anvertraut wurde. Dieser berühmte Gelehrte beteiligte sich an den meisten Fragen, die damals die Mathematiker beschäftigten. Er schrieb über die Quadratur der Kegelschnitte unter Benutzung des Schwerpunktes, über Wahrscheinlichkeitsrechnung, ferner eine wahrhaft klassische elementargeometrische Abhandlung über die Kreisrechnung. Sein Hauptwerk ist die 1663 herausgegebene Schrift „Horologium oscillatorium" (Pendeluhr). Sie enthält fünf Teile: 1. die Beschreibung der Pendeluhr, 2. der Fall schwerer Körper und ihre Bewegung auf der Zykloide, 3. die Lehre von der Evolution, 4. der Schwingungsmittelpunkt, 5. die Fliehkraft. Im 2. Teile wird nachgewiesen, daß ein auf der Zykloide zum tiefsten herabgleitender Punkt stets die gleiche Zeit braucht, von welchem Punkte er

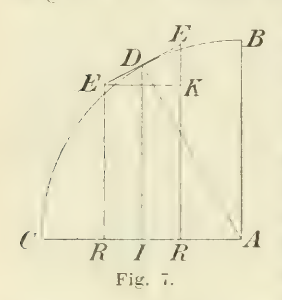


Fig. 7.

auch ausgeht (Tautochronismus). Der 3. Teil handelt über Evolventen und Evoluten und zeigt, daß jede Tangente der Evolute auf der Evolvente normal steht, daß die Evolute der Ort der Durchschnittspunkte konsekutiver Normalen auf die Evolvente ist, daß zu jeder Kurve die Evolute gefunden werden könne und daß letztere stets quadrierbar sei. 1693 veröffentlichte Huygens im Anschlusse an Fermat Abhandlungen über Maximal- und Minimalwerte und über das Tangentenproblem.

Veranlaßt durch Pascals Preisausschreibung wendeten viele Mathematiker der Zykloide ihre Aufmerksamkeit zu. So René de Sluse (1622—1685), der eine eigene Auflösung des Tangentenproblems für algebraische Kurven besaß, ferner die sogenannten Perlen, deren allgemeine Gleichung $b\,y^n = (c - x)^p x^m$ lautet, zuerst untersuchte. Er stellte auch die erste allgemeine Untersuchung über Inflexionspunkte von Kurven an. Die Bogenlänge der Zykloide fand als erster Christoph Wren (1632—1723) und verwendete sie zur Lösung des Keplerschen Problems.

1659 veröffentlichte John Wallis (1616—1703) ein Werk, in dem die Pascalschen Aufgaben gelöst wurden. Wallis war auch der erste, der in seinem „Treatise of algebra" (1685) eine geometrische Darstellung der imaginären Größen versuchte. Sein Hauptwerk aber ist die 1655 erschienene „Arithmetica infinitorum", deren Titel schon besagt, daß er im Gegensatze zu Cavalieris geometrischen Methoden rechnerisch verfuhr. Überhaupt liegt seine Stärke in der Anwendung numerischer Induktion — Interpolation nannte er sie —, durch die er zu wichtigen Resultaten gelangte. Der damals allgemein übliche Brauch, exakte Beweise durch unvollständige Induktion zu ersetzen, die Neigung zu gewagten Verallgemeinerungen

wurde von Wallis auf die Spitze getrieben. Im Anschlusse an Gregorius a S. Vincentio und Andreas Tacquet (1612—1660) bediente er sich der heute noch üblichen Form des Grenzüberganges, und zwar schon rein arithmetisch. Als ganz selbständige Operation und bequemes Mittel zur Definition neuer Zahlen, die nicht zu den gewöhnlichen Irrationalitäten gehören, verwendete dann den Grenzübergang James Gregory (1638—1675) in seinem 1667 gedruckten Werke „Vera circuli et hyperbolae quadratura". Diese Ansicht, die nur durch ungenügende Festlegung der Grundbegriffe Platz greifen konnte, blieb bekanntlich bis ins vorige Jahrhundert die herrschende.

Wallis war das bedeutendste Mitglied eines Kreises von Mathematikern, die sich seit der Mitte des Jahrhunderts zu gemeinsamer Arbeit zu versammeln pflegten und durch Briefwechsel auch mit auswärtigen Gelehrten verkehrten. Aus dieser Vereinigung entstand die „Königliche Gesellschaft" in London 1665. Auf ähnliche Weise entstand die Pariser „Akademie" 1666. Die Akademie in Berlin wurde 1700 gegründet.

Der erste Vorsitzende der Königlichen Gesellschaft war der Viscount William Brouncker (1620—1684), der durch zahlentheoretische Untersuchungen, eine Quadratur der Hyperbel und besonders dadurch bekannt ist, daß er die unendliche Faktorenfolge, die Wallis zur Darstellung von π verwendete, in die Form eines unendlichen Kettenbruches brachte.

Dieser Gesellschaft gehörten außer den schon erwähnten Wren und Gregory auch Nikolaus Mercator (aus Holstein, † 1687), Edmund Halley (1656 bis 1742) und Isaak Barrow (1630—1677), der Lehrer und Freund Newtons, an.

Aus den Unendlichkeitsbetrachtungen des 17. Jahrh. entstand als ein eigenes Gebiet die Theorie der unendlichen Reihen. Nikolaus Mercator entwickelte in seiner „Logarithmotechnia“ von 1668 die Reihe für $\log(1+x)$. Im selben Jahre veröffentlichte Brouncker eine Arbeit über unendliche Reihen, worin er sich auch mit Konvergenzbeweisen beschäftigte, ohne freilich darin jene Bedeutung zu erblicken, die sie für uns heute haben. Denn noch das 18., um so mehr das 17. Jahrh., hatte von der Notwendigkeit der Konvergenzuntersuchungen keine Ahnung.

Eine höchst bedeutungsvolle Abhandlung über unendliche Reihen, „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“, hatte der größte englische Mathematiker Isaak Newton (1643—1727) schon 1666 vollendet. Die Drucklegung erfolgte allerdings erst 1711, aber die hauptsächlichen Ergebnisse finden sich in der Algebra von Wallis (1685). Er entwickelte die Reihen für $\sin z$, $\cos z$, $\arcsin z$ und die Exponentialreihe. 1676 kannte er auch schon die Binomialreihe für beliebige Exponenten.

Auch der berühmte Philosoph und Staatsmann Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) beschäftigte sich schon frühzeitig mit derartigen Untersuchungen. Während man bisher gewohnt war, krummlinig begrenzte ebene Figuren zum Behufe der Quadratur durch parallele Ordinaten in Rechtecke zu zerlegen, teilte Leibniz derartige Flächen von einem Punkte aus in Dreiecke und nannte dieses Verfahren die Transmutation. Als erste Frucht dieser Studien fand er, daß der Inhalt des Kreises vom Durchmesser 1 durch die Reihe $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ ausgedrückt wird. Er kannte den wichtigen Satz, daß eine fallende alternierende Reihe einen endlichen Wert

besitze. Der Beweis für diesen Konvergenzsatz, den er 1714 bekannt gab, findet sich noch in den heutigen Lehrbüchern.

Im Sinne Newtons setzten Halley und Abraham de Moivre (1667—1754) die Reihentheorie fort. Die Leibnizsche Richtung verfolgte besonders Jakob Bernoulli. In einer 1689 veröffentlichten Abhandlung kommt Jakob Bernoulli auf die harmonische Reihe zu sprechen und beweist, daß sie eine unendlich große Summe besitze. Damit ist festgestellt, daß die Summe einer unendlichen Reihe, deren Endglied verschwindet, bald endlich, bald unendlich ist.

Die Geschichte der Mathematik hat sich mit fünf Trägern des Namens Bernoulli zu beschäftigen, den Brüdern Jakob (1654—1705) und Johann (1667—1748), dann mit Niclaus I. (1687—1759), dem Sohne eines dritten Bruders, endlich mit den beiden Söhnen Johanns, Niclaus II. (1695—1726) und Daniel (1700—1782).

In der erwähnten „Analysis per aequationes" behandelte Newton nach der Reihenentwicklung durch Wurzelausziehen die angenäherte Lösung von Zahlengleichungen durch Reihen (veröffentlicht von Wallis 1685) und machte damit einen ziemlich großen Schritt über das von Stevin und Viète Erreichte hinaus.

1690 erschien der „Traité d'algèbre" von Michel Rolle (1652—1719), der außer einer wirklichen Methode zur Auflösung unbestimmter Gleichungen auch Näherungsmethoden zur Bestimmung der Gleichungswurzeln enthält, unter denen die Methode der Kaskaden hervorragt.

Auch Leibniz beschäftigte sich zu verschiedenen Zeiten mit Gleichungen und setzte die schon in seiner mathematischen Erstlingsschrift „De arte combinatoria" (1666) ausgesprochene Überzeugung, daß die Vervoll-

kommnung und Erweiterung einer Wissenschaft von einer passend gewählten Zeichensprache abhänge, in die Tat um. 1676 wendete er zum ersten Male Stellenzeiger oder Indices an, um Punkte derselben Gattung mit den gleichen Buchstaben bezeichnen zu können; 1693 erfand er die Anwendung mehrfacher Stellenzeiger zur Auflösung des Eliminationsproblems und erhielt dadurch eine Eliminationsgleichung, die wir heute als die zu Null werdende Determinante schreiben. Die allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen, zunächst der Gleichung fünften Grades, ist ein im brieflichen Verkehre Leibnizens mit Walther von Tschirnhaus (1651—1708) viel behandeltes Thema.

Über den ersten Erfinder der Differential- und Integralrechnung ist ein langer, erbitterter Streit geführt worden. Unklarheit in betreff der Sache, um die es sich handelte, Parteileidenschaft, Nationaleitelkeit haben gleich anfangs die Frage verwirrt. Heute können wir dieselbe dahin beantworten, daß die Erfindung der Differential- und Integralrechnung in die erste Hälfte des 17. Jahrh. zu verlegen ist. Die verschiedensten einschlägigen Aufgaben wurden an den verschiedensten Orten behandelt, und zwar zuerst Aufgaben der Integralrechnung, dann auch der Differentialrechnung. Aber als führend erwiesen sich die französischen Mathematiker, vor allen Pascal und Fermat. Es handelte sich noch darum, den inneren Zusammenhang all dieser Aufgaben herzustellen. Am klarsten erkannte ihn ohne Zweifel unter allen Mathematikern jener Zeit Fermat, doch ist dem von ihm eingeführten E nicht anzusehen, von welcher Größe es als Veränderung auftritt.

Leibniz und Newton waren es, die diesen Zusammenhang vollständig zum Ausdrucke brachten und

daher als die Erfinder des Kalküls der Differential- und Integralrechnung bezeichnet werden. Was der Infinitesimalrechnung bisher noch fehlte, die einheitliche Sprache und Schrift, das gab ihr Leibniz. Newton besaß darüber selbständig Ähnliches, zum Teil schon früher, aber sein Wort „Fluxion" (das Leibnizsche Differential) kommt erst 1687 in dem Werke „Philosophiae naturalis principia mathematica", seine Bezeichnung 1693 durch Wallis in die Öffentlichkeit. Dagegen war Leibnizens grundlegende Abhandlung schon 1684 vorhanden. Seine Veröffentlichungen wirkten schulebildend, seine Methoden und Bezeichnungen wurden Gemeingut aller Mathematiker, aber auch sein Charakter steht heute frei von jeder Makel, die ihm Parteihaß anzuheften trachtete, vor unseren Augen.

Den Ausgangspunkt für Leibniz bildete der schon im August 1673 angestellte Versuch einer allgemeinen Tangentenmethode, wobei er sich des Pascalschen „charakteristischen Dreiecks" bediente. Der große Schritt der Erfindung des neuen Algorithmus erfolgte am 29. Oktober 1675. „Es wird nützlich sein," sagt Leibniz, „zu schreiben $\int$ statt omn., z. B. $\int l$ statt omn. l." (Solche Bezeichnungen finden sich zuerst 1670 bei Wallis.) „Hier zeige sich eine neue Gattung des Kalküls. Sei dagegen $\int l = y\,a$ gegeben, so biete sich ein entgegengesetzter Kalkül mit der Bezeichnung $l = \frac{y\,a}{d}$. Wie nämlich $\int$ die Abmessungen vermehrt, so vermindert sie d. $\int$ aber bedeutet Summe, d Differenz." Bald nachher schon entfernte er das d aus dem Nenner und schrieb statt $\frac{x}{d}$ die noch heute geltende Bezeichnung dx. Im Drucke veröffentlichte Leibniz seine Entdeckungen zuerst im

Mai 1684 in den seit 1682 erscheinenden „Acta eruditorum“ unter dem Titel: „Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.“ Er führt die Größe dx als eine beliebige, nicht etwa als eine unendlich kleine Strecke ein. Hier ist zum ersten Male der Unterschied zwischen einem Maximum und Minimum erkannt und ausgesprochen. Weiter ist der Differentialkalkül dargestellt und die Debeaunesche Aufgabe gelöst, welche verlangt, die Quadratur der Kurve zu finden, bei der sich die Ordinate zur Subtangente verhält, wie eine gegebene Strecke zur Differenz der Ordinate und Abszisse, eine inverse Tangentenaufgabe, für die sich schon Descartes interessiert hatte. Das Integralzeichen erscheint zum ersten Male im Drucke 1686 in der Abhandlung „De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum“, worin Leibniz auch die Transzendenten einführt als Größen, die durch keinerlei Gleichung bestimmten Grades erklärt werden, vielmehr über jede algebraische Gleichung hinausgehen. In weiteren Aufsätzen führt er den Begriff der Einhüllenden ein, löst die von Viviani 1692 gestellte, sogenannte „Florentiner Aufgabe“, aus einer Halbkugel rings um die Grundfläche herum vier gleiche Öffnungen herauszubrechen, so daß die restliche Fläche quadrierbar sei. 1693 im Supplementum geometriae practicae lehrte er die Integration von Differentialgleichungen durch Reihen mittels unbestimmter Koeffizienten, wobei auch die abermalige Differentiation einer Differentialgleichung zum ersten Male vorkam.

Den Terminus „Funktion“ verwendete Leibnitz 1692 in geometrischem Sinne. Die moderne Auffassung findet sich zuerst bei Johann Bernoulli 1698. Beide gebrauchten auch

schon um diese Zeit verschiedene Funktionalzeichen. Letzterer bediente sich 1718 zuerst des φ mit daneben geschriebenem Argumente (ohne Klammern), ebenso schrieben auch später noch Clairaut und d'Alembert. f mit eingeklammertem Argumente gebrauchte Euler (gedruckt 1740).

Daß Rektifikation, Kubatur, Quadratur Aufgaben von wesentlich gleicher Natur seien, spricht Newton schon in der mehrerwähnten „Analysis per aequationes" aus. Im Anschlusse an Barrows 1664—1666 erschienenes Werk „Mathematicae lectiones" geht Newton von der Bewegungslehre aus. Barrow stellt die in den aufeinanderfolgenden Zeiten statthabenden Geschwindigkeiten durch Strecken dar, deren Gesamtheit ein Bild der vollzogenen Bewegung darbietet. Auch die Tangentenaufgabe ist ihm eine Anwendung des Gedankens, Eigenschaften der Kurven aus der Zusammensetzung von Bewegungen abzuleiten. Die Methode der durch Rechnung herzustellenden Tangenten verdankte er seinem Freunde Newton. Letzterer ging aber weiter, indem er in der „Analysis" noch den Begriff der Augenblicksveränderung (momentum), der in der kürzesten Zeit sich vollziehenden räumlichen Veränderung, hinzufügte. Newton beabsichtigte, 1671 eine große Abhandlung „Methodus fluxionum et serierum infinitarum" zu veröffentlichen. Durch eine sonderbare Verkettung von Umständen erschien sie aber erst nach seinem Tode 1736. Die Aufgabe der Fluxionsmethode ist eine doppelte, die Geschwindigkeit zu finden aus dem Wege und den Weg aus der Geschwindigkeit. Ein stetig sich ändernder Raum heißt ein Fluens. Die Geschwindigkeiten, nach welchen die einzelnen Fluenten (x, y, z, u) sich ändern, heißen Fluxionen ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$). Die zweite Aufgabe, von der Fluxionsgleichung zur Gleichung zwischen den Fluenten zurückzukehren, löst Newton durch Entwick-

lung in unendliche, nach Potenzen der Fluenten fortlaufende Reihen. Als dritte Aufgabe behandelt er Maxima und Minima, als vierte die Tangentenkonstruktion, als fünfte die Größe der Krümmung einer Kurve in einem bestimmten Punkte, wobei der Fluxionenquotient durch eine Strecke *z* dargestellt wird, so daß die Fluxion des Fluxionenquotienten auch gebildet werden kann.

Der neue, von Leibniz erfundene Kalkül wurde von den Brüdern Jakob und Johann Bernoulli mit wahrer Begeisterung aufgenommen und auf die Lösung alter und neuer Probleme angewendet. Jakob behandelte 1690 die von Leibniz 1787 aufgestellte Aufgabe der Isochronen, wobei er sich zum ersten Male des Wortes „Integral" bediente, das auch von Leibniz gebilligt wurde. Zum Schlusse stellte er die Aufgabe, die Gestalt eines biegsamen, an zwei Punkten frei aufgehängten Seiles zu finden, die schon Galilei zu lösen versucht hatte. Sie wurde von Leibniz, Huygens und Johann Bernoulli gelöst. Andere Untersuchungen beschäftigten sich mit den Segelkurven, der logarithmischen Spirale, der elastischen Kurve, der Lemniskate.

Johann Bernoulli behandelte 1694 die Differentialgleichungen erster Ordnung, wobei auch der Ausdruck „Trennung der Veränderlichen" vorkommt. Anschließend an Leibnizens Integration durch Reihen gibt er die allgemeine Formel der Entwicklung einer Funktion in eine unendliche Reihe. 1697 stellt er die Aufgabe, eine Kurve zu finden, die gegebene Kurven unter gegebenem, unveränderlichen oder nach einem bestimmten Gesetze veränderlichen Winkel schneidet, die er im folgenden Jahre „Trajektorie" nannte. Auch die Rechnung mit den Exponentialgrößen (so nannte man die schon von Leibniz aufgestellte Exponentialfunktion) begrün-

dete er 1697, wobei er als Beispiel die logarithmische Kurve ($y = \log x$) verwendete, die zuerst Descartes 1639 behandelt hatte. Im Jahre 1696 legte er den Mathematikern die erste Aufgabe der Variationsrechnung vor, den Weg zu finden, auf welchem ein Körper von einem Punkte A zu einem Punkte B in der kürzesten Zeit fällt. Die Anregung zu dieser Aufgabe entsprang der von Huygens entwickelten Wellentheorie des Lichtes. Das Jahr 1697 brachte dann die Lösungen von Johann Bernoulli selbst, der die Kurve (Zykloide) Brachistochrone nannte, vom Marquis de L'Hospital, von Newton, Leibniz und Jakob Bernoulli. Nur die beiden letzteren behandelten das Problem als Maximal- und Minimalaufgabe, und die Methode von Jakob Bernoulli blieb bis auf Lagrange für die Behandlung ähnlicher Fälle die herrschende. Auch das schon aus dem Altertume stammende isoperimetrische Problem erfuhr zuerst (1701) durch Jakob Bernoulli eine streng wissenschaftliche Behandlung, während hinwieder Johann 1698 das Problem der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten einer Fläche, das auf Raumkurven führt, die das 19. Jahrh. „geodätische Linien" nannte, zuerst mit Erfolg in Angriff nahm.

Zu den wissenschaftlichen Freunden Leibnizens gehörte Guillaume François Marquis de L'Hospital (1661 bis 1704), der 1696 das erste Lehrbuch der Differentialrechnung „Analyse des infinement petits pour l'intelligence des Lignes courbes" veröffentlichte. Einer der eifrigsten Verbreiter des neuen Kalküls in Frankreich war Pierre Varignon (1654—1722).

Als grundsätzlicher Gegner der Leibnizschen Differentialrechnung erhob sich Bernhard Nieuwentijd (1654—1718), dessen Einwendungen teilweise ganz be-

rechtigt waren, da die Lehre vom Unendlichkleinen an Unvollkommenheiten litt, die erst durch Cauchy vollständig behoben wurden. Ein persönlicher Feind Leibnizens war Nicolas Fatio de Duillier (1664—1753), der den Anstoß zu dem erwähnten Prioritätsstreite über die Erfindung der Infinitesimalrechnung gab (1699).

3. XVIII. Jahrhundert.

Durch die Hebung des Schulwesens in diesem Jahrhunderte wurde der elementare Rechenunterricht gefördert. Bedeutsam für seine Entwicklung wurden die methodischen Schriften von Johann Christoph Sturm (1635—1703), Christian Wolf (1679—1754), Abraham Gotthelf Kästner (1719—1800) u. a. Als Schulbuch war von besonderem Werte die 1732 erschienene „demonstrative Rechenkunst“ von Christlieb v. Clausberg (1689—1751). Während bei allen Zinsrechnungen mit gesuchtem Endwerte bereits das 16. Jahrh. die richtigen Methoden besaß, kamen in der Rabattrechnung noch lange Zeit Unrichtigkeiten vor, bis Leibniz darauf hinwies, daß der Rabatt auf 100 berechnet werden müsse. Clausberg stellte sich entschieden auf die Seite Leibnizens und so einigten sich allmählich Mathematiker und Juristen auf die richtige Formel. Die Wechsel- und Arbitragerechnung erfuhr durch Clausberg eine eingehende Begründung und Ausführung. Zu den besten Schulbüchern gehört Basedows „Überzeugende Methode der Arithmetik“ (1763).

Von besonderer Bedeutung für die allgemeine Arithmetik ist die Entwicklung, welche die Theorie der imaginären und komplexen Zahlen fand. Hierher gehört (1730) die Moivresche Formel: $\cos\varphi + i\sin\varphi = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ und die Eulersche Formel (1748):

$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{\varphi i}$, die sich übrigens ihrem Wesen nach schon bei Cotes (1722) findet. (i für $\sqrt{-1}$ führte Euler 1777 ein.) Kaspar Wessel (1745—1818) entwarf 1799 eine klare Darstellung der geometrischen Bedeutung komplexer Größen und legte auch den Grund zu den Quaternionen, aus denen er die sphärische Trigonometrie ableitete. Auch über das Wesen der Zahlen π und e treffen wir wichtige Aufschlüsse an. So bewies Joh. Heinr. Lambert (1728—1777), im Anschlusse an Thomas Fantet de Lagny (1660—1734), daß π nicht rational sein könne und daß e^n für rationale n irrational sei (1761). Den unvollständigen Beweis ergänzte Andrien Marie Legendre (1752—1833) und zeigte, daß π nicht Quadratwurzel einer rationalen Zahl sei (1799). Als beliebte Lehrbücher der allgemeinen Arithmetik sind zu nennen: Kästner, Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen (1760) und der 2. Teil des Cursus mathematicus von Joh. Andr. v. Segner (1704—1777): Elementa analysis finitorum (1758).

Durch die von Leibniz begründete kombinatorische Analysis nahm auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung einen neuen Aufschwung. 1713 erschien Jakob Bernoullis nachgelassenes Werk „Ars coniectandi" in vier Abschnitten. Der erste enthält die Huygenssche Abhandlung mit bedeutungsvollen Erweiterungen. Im 2. Abschnitt ist eine ausführliche Darstellung der Kombinationslehre gegeben. In ihm treten auch zum ersten Male die „Bernoullischen Zahlen" auf. Der 3. Abschnitt bringt Anwendungen der Kombinationslehre auf Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Lösung mitunter recht schwieriger Probleme. Der 4. unvollendete Abschnitt endlich ist der Glanzpunkt des Werkes; in ihm werden der Wahrscheinlich-

keitsrechnung ganz neue Bahnen gewiesen durch das berühmte „Bernoullische Theorem" (Gesetz der großen Zahlen), das neben die bis dahin allein betrachtete Wahrscheinlichkeit a priori die für alle Anwendungen auf die verschiedenen Gebiete des Lebens viel wichtigere Wahrscheinlichkeit a posteriori stellt. Von hervorragender Bedeutung sind auch „Essai d'analyse sur les jeux de Hasard" (1708) von Pierre de Montmort (1678—1719) und „Doctrine of Chances" (1718) von Moivre. Weiterhin taten sich auf dem Gebiete der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung hervor Leonhard Euler (1707—1783, Brückenaufgabe 1736), Daniel Bernoulli (Petersburger Aufgabe), der zuerst die Infinitesimalrechnung in die Wahrscheinlichkeit einführte. Pierre Simon Laplace (1749—1827) wendete in seinen tiefgehenden Untersuchungen (1775) zuerst rekurrente Reihen auf Fragen dieses Gebietes an, ebenso Joseph Louis Lagrange (1736—1813). Condorcet (1743—1794) veröffentlichte 1785 das wichtige Werk „Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité". Die Theorie der Fehler stammt aus den „Opera miscellanea" (1722) von Roger Cotes (1682—1716) und wurde von Thomas Simpson (1710—1761) zuerst auf Beobachtungen angewendet (1756). Weitere Ausbildung erhielt sie durch Lagrange (1773) und Dan. Bernoulli, der sich einer Fehlerkurve bediente (1778).

Gegen Ende des Jahrhunderts wurde dieses Gebiet von einer Anzahl deutscher Gelehrter mit Vorliebe gepflegt und es entstand unter Führung Karl Friedr. Hindenburgs (1741—1808) die „kombinatorische Schule". Sein Hauptwerk erschien 1796. Weitere Vertreter dieser Schule waren Hieron. Christoph Eschenbach (1764—1797), Heinr. Aug. Rothe (1773—1842),

Georg Simon Klügel (1739—1812) und besonders Joh. Friedr. Pfaff (1765—1825). Sie zeichnete sich durch Eleganz der Resultate aus, vermochte aber auf die Entwicklung der Mathematik zunächst nur wenig einzuwirken, da der Einfluß der gleichzeitigen französischen Mathematiker überwog. Doch hat das 19. Jahrh. wieder vielfach an ihre Resultate angeknüpft.

Das 18. Jahrh. brachte drei große Zahlentheoretiker hervor, Euler, Lagrange und Legendre.

Euler lieferte zu vielen Fermatschen Sätzen die Beweise, ferner gab er die allgemeine Lösung der unbestimmten Gleichung 2. Grades nebst vielen scharfsinnigen Lösungen einzelner Gleichungen. Lagrange, dessen wichtigste Veröffentlichungen aus den Jahren 1769, 1773, 1775 stammen, bewies, daß eine beliebige Zahl als Summe von vier oder weniger Quadraten darstellbar ist und daß eine reelle Wurzel einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Er gab den ersten Beweis dafür, daß die Gleichung $x^2 - A y^2 = 1$ stets in ganzen Zahlen lösbar ist, und entdeckte viele Sätze über Primzahlen. In den „Meditationes analyticae" (1770) von Edward Waring (1734 bis 1798) finden wir den Goldbachschen Satz: Jede gerade Zahl ist die Summe zweier Primzahlen, und den Wilsonschen Satz: Ist n eine Primzahl, so ist $\frac{1 \cdot 2 \ldots (n-1) + 1}{n}$ eine ganze Zahl.

1783 veröffentlichte Euler das von ihm schon 1746 geahnte quadratische Reziprozitätsgesetz. Legendre entdeckte den Satz unabhängig und versuchte auch einen allgemeinen Beweis in den „Recherches d'analyse déterminée" (1788). Im „Essai sur la théorie des nombres" (1798) findet sich der Name „Reziprozitätssatz" und das

„Legendresche Symbol“. Völlig einwurfsfrei gelang der Beweis erst 1796 dem dritten Entdecker des Satzes, dem größten deutschen Mathematiker, Karl Friedrich Gauß (1777—1855), der ihn in den berühmten „Disquisitiones arithmeticae“ (1801) veröffentlichte. Mit diesem Werke beginnt die moderne Zahlentheorie.

Einen wichtigen Fortschritt in der Algebra bezeichnet die 1707 veröffentlichte „Arithmetica universalis“ von Newton. Hier wird zum ersten Male die Frage nach der wirklich vorhandenen Anzahl komplexer Gleichungswurzeln aufgeworfen und zu beantworten versucht. Die schon von Girard berechneten symmetrischen Funktionen (der Potenzsummen) der Wurzeln einer algebraischen Gleichung werden benutzt zur Auffindung einer Grenze, unter der die Wurzelwerte liegen müssen. Gleichzeitig gibt Newton zu verstehen, man könne auch Formeln für die Summen höherer Wurzelpotenzen finden. Nach der algebraischen Auflösung der Gleichungen werden auch geometrische Methoden gegeben, deren Zweck es ist, erste Näherungswerte zu finden. Weitere Erläuterungen zu Newtons Regel für die Auffindung der Anzahl komplexer Wurzeln einer Gleichung gaben Colin Maclaurin (1698—1746) und Georg Campbell. Als tüchtige Algebraiker haben wir auch zu nennen Jean Paul de Gua de Malves (1712—1785), der die Anzahl der komplexen Gleichungswurzeln auf geometrischem Wege bestimmte (1740), und Waring (Miscellanea analytica 1762, Meditationes algebraicae 1770).

Bedeutende Werke über die gesamte Algebra sind: Simpson, Treatise of algebra 1745 und Alexis Claude Clairaut (1713—1765), Éléments d’algèbre 1746. Das einflußreichste Werk aber war Eulers Anleitung zur Algebra, das in der 1. Auflage 1760 erschien. Der Schluß

des Jahrhunderts (1799) brachte noch zwei bedeutende Werke: Sylvestre François Lacroix (1765—1843), Éléments d'algèbre und James Wood (1760—1839), Elements of algebra. Ersteres erlangte in Frankreich, letzteres in England große Verbreitung.

Euler beschäftigte sich 1748 mit der Resultante zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten und führte ihre Bestimmung auf die Lösung eines Systems linearer Gleichungen zurück. (Der Terminus „Resultante" stammt von Laplace 1776.) Die nach ihm benannte Eliminationsmethode erläuterte er eingehend 1764. Etienne Bezout (1730—1783) behandelte die Elimination in mehreren hervorragenden Arbeiten 1764, 1767 und besonders in der Théorie générale des équations algébriques, 1779. Er bestimmte den Grad der Resultante von Gleichungen mit mehreren Unbekannten und gab an, wieviel gemeinsame Wurzeln höchstens ein Gleichungssystem erfüllen. Weiterhin wurde die Eliminationstheorie gefördert durch Lagrange, der 1770 die Bedingung für mehrere gemeinsame Wurzeln aufstellte und 1772 die bedeutendste Abhandlung des 18. Jahrh. über Gleichungstheorie veröffentlichte. Hier werden allgemeine Gesichtspunkte angegeben und die Methoden vorbereitet, auf denen die Algebraiker des 19. Jahrh. weiter bauten. Auf Lagrange gehen auch die Anfänge der Theorie der Formen und der Invarianz zurück, indem er zeigte, daß die Diskriminante der quadratischen Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ beim Übergange von x zu $x + \lambda y$ unverändert bleibe. Er klassifizierte die Formen dieses Typus nach dem Zeichen von $b^2 - 4ac$ und begründete die ersten Begriffe der Transformation und Äquivalenz.

Über angenäherte Gleichungsauflösung durch Reihen schrieb Lambert 1758, Segner 1759. Lagrange be-

diente sich mit Vorliebe der Kettenbrüche zur Berechnung der Wurzeln bestimmter und unbestimmter Gleichungen (Sur la résolution des équations numériques 1769).

Nachdem alle bisherigen Bemühungen, die allgemeine Auflösung von Gleichungen, die den 4. Grad überstiegen, zu finden, sich als fruchtlos erwiesen hatten, versuchte Euler 1749 zunächst die Gleichung vom Grade $2n$ in zwei Faktoren n-ten Grades zu zerlegen mit Hilfe unbestimmter Koeffizienten, ohne jedoch befriedigende Ergebnisse zu erlangen. 1762 versuchte er, eine Wurzel der Gleichung n-ten Grades aus $n-1$ Radikalen n-ten Grades mit untergeordneten Quadratwurzeln zusammenzusetzen, wobei er auch bis zum 4. Grade keine Schwierigkeiten fand. Aber schon bei Gleichungen 5. Grades mußte er sich auf spezielle Fälle beschränken. So erhielt er aus $x^5 - 40x^3 - 72x^2 + 50x + 98 = 0$ die Wurzel

$$x = \sqrt[5]{-31 + 3\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-31 - 3\sqrt{-7}}$$
$$+ \sqrt[5]{-18 + 10\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18 - 10\sqrt{-7}}\,.$$

Bezout eliminierte aus den Gleichungen $y^n - 1 = 0$ und $a y^{n-1} + b y^{n-2} + \ldots + x = 0$ y und gelangte so zu einer Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$. Weiterhin bediente er sich der Koeffizientenvergleichung. Er vermochte zwar ebensowenig die Gleichung 5. Grades zu lösen, doch gab ihm das Problem Veranlassung, die Eliminationsmethode zu verbessern.

Lagrange beleuchtete alle bisherigen Methoden der Gleichungsauflösung und zeigte, wie die Grenzen der Wurzeln und die Zahl der imaginären Lösungen bestimmt werden können. Er untersuchte durch Resolventenbildung die Wurzeln einer Gleichung als Funk-

tionen der Koeffizienten und fand, daß die Lösung der Gleichung des 5. Grades abhänge von einer des 6. Grades („resolvent sextic"). Zugleich erkannte er, daß alle Resolventen rationale Funktionen der Gleichungswurzeln darstellen. Zum Studium dieser Funktionen erfand er den „Calcul des combinaisons", den ersten Schritt zur Theorie der Substitutionen. Hieher gehört auch ein Mémoire (1771) von Alexandre Théophile Vandermonde (1735—1796) und die Abhandlung „de aequationibus quadrato-cubicis" (1771) von Gianfrancesco Malfatti (1731—1807), worin er die Konstruktion der Resultante untersuchte und alle auflösbaren Fälle der Gleichung des 5. Grades angab. Den nächsten bedeutsamen Schritt machte Paolo Ruffini, dessen erste Arbeit über die Gleichung 5. Grades 1799 erschien.

Während sich also das allgemeine Problem der Auflösung höherer Gleichungen als unlösbar erwies, wurden in speziellen Fällen wichtige Resultate gefunden. So behandelte Moivre (1730) die reziproken Gleichungen, Euler die symmetrischen Gleichungen und Bezout gab die Bedingung an, unter der die Gleichung n-ten Grades auf die Form $y^n + a = 0$ gebracht werden kann. Ferner gehört hierher die Kreisteilungsgleichung, für die Gauß (1801) eine abschließende Theorie aufstellte.

In der Dissertation von 1799 gab Gauß den ersten seiner Beweise für den Satz, daß jede algebraische Gleichung eine reelle oder komplexe Wurzel hat. Hier sprach er auch die Vermutung aus, daß es unmöglich sei, Gleichungen von höherem als dem 4. Grade durch Wurzelgrößen aufzulösen. Den strengen Beweis lieferte Abel im Jahre 1824. Was die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung anbelangt, so hatte schon 1742 Euler den Satz

richtig so formuliert, daß jeder algebraische Ausdruck in Faktoren ersten und zweiten Grades mit reellen Koeffizienten zerfällt werden kann, aber den strengen Beweis vermochte weder er selbst noch Jean le Rond d'Alembert (1717—1783) noch Lagrange zu erbringen. Auch diesen Fundamentalsatz der Algebra bewies zum ersten Male Gauß in der genannten Dissertation. Auch in der Folge kam Gauß noch dreimal (1815, 1816, 1849) auf dieses Thema zurück und stellte weitere Beweise auf.

Die bereits von Leibniz begonnenen Untersuchungen über Determinanten wurden erst von Gabriel Cramer (1704—1752) wieder aufgenommen, der 1750 das System von n Gleichungen mit n Unbekannten durch die nach ihm benannte Regel löste. Die Theorie wurde vervollkommnet von Bezout und Vandermonde, der die Determinanten zuerst als independente Funktionen erkannte (1770). Laplace gab 1772 eine allgemeine Methode ihrer Entwicklung und Lagrange zeigte ihre Anwendbarkeit auf Fragen außer der Elimination, bei Aufgaben der analytischen Geometrie.

Die Reihentheorie, die, wie wir sahen, aus den Unendlichkeitsbetrachtungen des 17. Jahrh. entstand und rasche Fortschritte machte, fand auch im 18. Jahrh. wesentliche Förderung, besonders durch Anwendung der Differentialrechnung — allerdings mehr nach der formalen Seite, da man sich um Konvergenz und Divergenz wenig kümmerte.

1715 veröffentlichte Brook Taylor (1675—1715) seine berühmte Reihe, die er mit Hilfe der von ihm umgestalteten sogenannten „Newtonschen Interpolationsformel" herleitete. Er hob auch schon diejenige Spezialform seiner Reihe, die später den Namen der „Maclaurinschen" erhielt, ausdrücklich hervor. Den Beweis des

binomischen Lehrsatzes für beliebige rationale Exponenten versuchte zuerst Maclaurin in seinem umfangreichen Werke „Treatise of fluxions" (1742), wo er auch den polynomischen Satz bewies. Euler gab seinen berühmten Beweis 1774.

Die schon von Gregory aufgestellten Reihen

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}(\operatorname{tg} x)^3 + \frac{1}{5}(\operatorname{tg} x)^5 - \frac{1}{7}(\operatorname{tg} x)^7 + \ldots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \ldots,$$

deren erste für den Zentriwinkel 45° in die Leibnizsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$ übergeht, ferner die von Newton und Leibniz entwickelten Reihen für $\sin \operatorname{vers} x$, $\sin x$, $\cos x$, e^{-x} und e^x fanden neue Ableitungen und weitere Behandlung durch Johann Bernoulli (1701) und Jakob Bernoulli (1702). Ersterer machte auch schon den Übergang vom Arcustangens zum Logarithmus einer negativen Zahl (1702). 1743 veröffentlichte Simpson, in weiterer Ausführung Newtonscher Gedanken, seine Regel der Quadratur mittels einer Hilfskurve.

Die größte Gewandtheit in Behandlung unendlicher Reihen zeigte aber Euler, der die Exponentialreihe aus der Binomialreihe ableitete, ferner rationale Funktionen in Reihen entwickelte, die nach sin und cos der ganzen Vielfachen des Argumentes fortschreiten, wobei er die Koeffizienten dieser trigonometrischen Reihen durch bestimmte Integrale definierte (1777).

Moivre behandelte in eingehender Weise die rekurrenten Reihen, in denen jedes folgende Glied in konstantem linearen Zusammenhange mit dem vorhergehenden steht. Bereits 1707 veröffentlichte Moivre das berühmte nach ihm benannte Theorem, das den Bemühungen um Formeln für den sin und cos der Vielfachen eines Winkels seine Entdeckung verdankte, aber im Sinne der Einführung des Rechnens mit imaginären Größen weit über die Grenzen der Trigonometrie hinausgriff. In enger Beziehung dazu steht die von Roger Cotes (1682—1716) gefundene Zerlegung von $a^\lambda \pm b^\lambda$, wo λ eine ganze Zahl ist, in Faktoren. Lagrange veröffentlichte 1768 seine Umkehrungsformel, die grundlegend ist für rekurrente Reihen, stellte 1775 das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe aus bekannten Anfangsgliedern dar und entwickelte daraus 1797 seine Interpolationsformel. Das wichtige Werk über rekurrente Reihen von Vincenzo Riccati (1707—1775), bereits 1756 vollendet, erschien 1768. Laplace gab Reihenentwicklungen mit zwei Variablen, namentlich in rekurrente Reihen; Legendre veranlaßte durch Einführung der Kugelfunktionen eine wichtige Erweiterung der Reihentheorie. In den Meditationes analyticae (1781) von Waring treten schon moderne Anschauungen über Konvergenz hervor.

Wie auf den meisten anderen Gebieten der Mathematik, so trat auch in der Reihenlehre mit Gauß ein Wendepunkt ein; es begann die Zeit der exakten Behandlung, die Aufstellung der Kriterien der Konvergenz und Divergenz, die Untersuchung des Restes und der Fortsetzung der Reihen über den Konvergenzbereich hinaus.

Eine ausführliche Darstellung der gesamten mathematischen Wissenschaft um die Mitte des 18. Jahrh. mit Ausschluß der Differential- und Integralrechnung gibt

Eulers „Introductio in analysin infinitorum“ (1748), enthaltend die algebraische Analysis und die analytische Geometrie. Der erste Teil behandelt die Funktionen, ihre Umformung und Darstellung durch unendliche Reihen, die Exponentialfunktion, Logarithmen und Kreisfunktionen und ihre Reihenentwicklung, unendliche Produkte, Zerlegung von Brüchen, rekurrente Reihen und ihre Anwendung zur Berechnung der Wurzeln der Gleichungen, Anwendung der Reihenlehre auf Zahlentheorie, Kettenbrüche.

Mit der Vervollkommnung der Elemente der Geometrie beschäftigte sich d'Alembert in der „Encyclopédie“ und Louis Bertrand (1731—1812). Verbreitete Lehrbücher dieses Gegenstandes waren: Simpson, Elements of plane geometry 1747; Kästner, Anfangsgründe 1758; Karsten (1780); Lacroix (1796—99); am verbreitetsten, besonders auch noch im 19. Jahrh., waren die „Éléments de géométrie“ von Legendre (1794). In diesem Werke treten schon symmetrisch gleiche Gebilde auf. In Kästners „Geometrischen Abhandlungen“ (1790) findet sich die Gleichung $AB + BC = AC$.

Von elementar-geometrischen Einzeluntersuchungen seien erwähnt die Bestimmung des algebraischen Ausdruckes für den Abstand der Mittelpunkte des einem Dreiecke ein- und umgeschriebenen Kreises durch William Chapple (1746), die ersten Untersuchungen über den Flächeninhalt überschlagener Vielecke von Fr. Meister (1769). Die 1678 veröffentlichten Transversalensätze des Giovanni Ceva wurden von Robert Simson (1687—1768) und Matthew Stewart (1717—1785) weiter ausgedehnt. Letzterer, ein feiner Kenner der alten Geometrie, veranstaltete zahlreiche Ausgaben der

ersten sechs Bücher Euklids, die bis heute die Grundlage des Unterrichtes in England bilden.

1704 veröffentlichte Newton seine „Enumeratio linearum tertii ordinis", in der er zuerst den Grad einer Kurve durch die Anzahl von Durchschnittspunkten mit einer Geraden bestimmte und die so definierten Kurven 3. Grades in Gruppen zusammenfaßte. Er fand zahlreiche solche Kurven, die sich als „Schatten" von fünf Typen darstellen lassen, womit ein bedeutender Fortschritt der Perspektive verbunden war. Newton konstruierte die Kegelschnitte aus fünf Tangenten, behandelte mehrfache Punkte einer Kurve im Endlichen und Unendlichen und gab Regeln zur Untersuchung des Verlaufes der Kurven in der Umgebung eines ihrer Punkte (Newtonsches Parallelogramm), sowie auch zur Bestimmung der Ordnung der Berührung. (Auch Leibniz und Jakob Bernoulli hatten über Oskulationen geschrieben.) Erläuterungen und Fortsetzungen dieses Werkes verdanken wir James Stirling (1692—1770) und Maclaurin in seinem vortrefflichen Werke „Geometria organica" (1720). Die Lehre von den vielfachen Kurvenpunkten brachte 1716 Josef Saurin (1650—1737) zum Abschlusse. Über Singularitäten handelte Maupertuis (1698—1759) in einem Aufsatze von 1729.

Auf die Untersuchungen von Descartes, Newton und Maclaurin gründeten sich die ersten Darstellungen einer allgemeinen Kurvenlehre in dem 2. Bande der „Introductio" von Euler (1748) und in der 1750 erschienenen „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques" von Cramer. Euler unterscheidet algebraische und transzendente Kurven und versucht eine Klassifikation der ersteren. Ein geistvolles Werk über die Kurvenlehre liegt vor in „Proprietates algebraicarum curvarum"

(1772) von Waring. Hier werden u. a. im Anschlusse an die Kegelschnitte Maxima und Minima behandelt. Im gleichen Jahre schrieb auch Euler über die kleinste Ellipse durch vier Punkte. Gregorio Fontana (1735 bis 1803) gebrauchte 1784 die Polargleichung, Kästner schrieb 1793 über äquidistante Kurven und Jean Trembley (1749—1811) über Trajektorien (1797).

Die Anwendung der Koordinatenmethode auf den Raum von drei Dimensionen nahm in konsequenter Weise zuerst Antoine Parent (1666—1716) vor, indem er Oberflächen durch eine Gleichung zwischen den drei Koordinaten eines Raumpunktes darstellte (1700). Einen wesentlichen Fortschritt machte diese Anwendung durch Clairaut, der in dem 1731 gedruckten klassischen Werke „Recherches sur les courbes à double courbure" die Raumkurven behandelte. Von großer Bedeutung für die analytische Geometrie des Raumes ist die Abhandlung über die dreiseitige Pyramide von Lagrange (1773). Euler behandelte zuerst die drei Koordinaten in symmetrischer Weise (1779) und stellte die Grundzüge der heutigen Theorie der Raumkurven auf in einer Abhandlung von 1782. Hier führte er auch die sphärische Abbildung und die zyklische Vertauschung ein. 1760 veröffentlichte er seine berühmte Schrift „Sur la courbure des surfaces" über Krümmungshalbmesser der Normalschnitte einer Fläche. Ebenbürtig ist eine 1776 vollendete und 1785 gedruckte Abhandlung von Meusnier (1754—1793), in der wir den nach ihm benannten Satz vorfinden, sowie auch die Haupteigenschaft der Minimalflächen, daß ihre Hauptkrümmungsradien überall gleich und entgegengesetzt sind, nebst einigen speziellen Minimalflächen. Lagrange gab 1760 die Differentialgleichung der Minimalflächen in der bekannten Form

$r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0$. 1769 behandelte Euler die Aufgabe, Flächen zu finden, so daß die über demselben Stücke der xy-Ebene befindlichen Flächenteile gleich sind, 1777 lehrte er die flächentreue und winkeltreue (nach Friedr. v. Schubert [1758—1825] „konform" genannte) Abbildung, letztere unter Anwendung komplexer Größen. Über abwickelbare Flächen schrieb er 1771, wobei x, y, z als Funktionen zweier Veränderlichen erscheinen und gezeigt wird, daß das Linienelement der abwickelbaren Fläche mit dem der Ebene übereinstimmen muß. Auch Gaspard Monge (1746—1818) verfaßte in diesem Jahre ein Mémoire über abwickelbare Flächen (gedruckt 1785). 1795 veröffentlichte dieser große Geometer die „Feuilles d'analyse", das bedeutendste Werk über Raumkurven und Flächentheorie im 18. Jahrh.

Die darstellende Geometrie begann durch Arbeiten von Abraham de Bosse (17. Jahrh.), einem Schüler Desargues', und Frézier (1682—1776). Zu einer selbständigen Disziplin wurde sie durch Monge erhoben, der in der „Géométrie descriptive" (1798) Horizontal- und Vertikalebene mit dem Grundschnitte einführte, Punkte und Gerade durch zwei Projektionen, Ebenen durch zwei Spuren darstellte. Dieses Werk gab eine ausführliche Theorie des perspektivischen Zeichnens und schuf den Begriff der geometrischen Allgemeinheit und Eleganz. Mächtig fördernd wirkten für die neue Disziplin die gleichzeitig entstehenden technischen Schulen, deren Vorbild die unter dem Einflusse von Monge 1794 in Paris gegründete „école polytechnique" wurde.

Mit der darstellenden Geometrie bildete sich auch die projektivische Geometrie heraus, und insofern kann die „géométrie descriptive" von Monge auch als die Grundlage dieser Disziplin angesehen werden.

Die Perspektive, der Sonderfall der Projektivität, der wegen des Bedürfnisses der Zeichenkunst, besonders bei Herstellung von Land- und Seekarten, zuerst behandelt worden war, wurde im Anschlusse an Desargues besonders durch Taylor und Lambert ausgebildet. Ersterer bestimmte in der „Linear perspective" (1715) eine Gerade durch ihre Spur und den Verschwindungspunkt, eine Ebene durch ihre Spur und Verschwindungsgerade. Lambert schrieb „die freye Perspective" (1759), ein hervorragendes Werk, in dem er diese Methoden zur perspektivischen Abbildung von räumlichen Gebilden allgemeiner Lage benutzte.

Die Rechnungen der Trigonometrie waren durch Viètes Einführung algebraischer Behandlung und durch die Erfindung der Logarithmen wesentlich erleichtert worden. Im 18. Jahrh. erhielt dieser Zweig der Mathematik seine heutige Vollendung. Die übersichtliche Gestaltung der Formeln ist in erster Linie Euler zu verdanken, der konsequent die Seiten des Dreieckes mit a, b, c, die Winkel mit A, B, C bezeichnete. Aber nicht nur die äußere Form, auch der Inhalt der trigonometrischen Ausdrücke ist durch Euler ein anderer geworden. Er definierte die goniometrischen Funktionen nicht mehr als Linien, sondern als Verhältnisse von Linien, als Zahlen, um sie in die Reihen einführen zu können, und leitete die ganze sphärische Trigonometrie aus einigen wenigen Formeln ab (1753 und 1779). 1753 machte er auf den Zusammenhang der Formeln für die ebene und sphärische Trigonometrie aufmerksam. Lambert, ebenfalls ein bedeutender Förderer der Trigonometrie, setzte diesen Zusammenhang genauer auseinander und gab einen Beweis der „Napierschen Regel", bei dem er sich unbewußt des Begriffes der „Gruppe"

bediente (1765). 1768 wendete er auf trigonometrische Probleme Hyperbelfunktionen an, deren Theorie Graf Vincenzo Riccati begründet hatte. In zwei aus dem Jahre 1778 stammenden Abhandlungen beschäftigte sich Euler eingehend mit der sphärischen Trigonometrie und bediente sich dabei des sphärischen Exzesses. Mit besonderer Eleganz handhabten die Eulerschen Formeln sein Schüler Andr. Joh. Lexell (1740—1784), sein Gehilfe Nikolaus Fuß (1755—1826) und Schubert. Roger Boscovich (1711—1787) gab 1784 die vier Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie, die man heute als „Fehlergleichungen" zu bezeichnen pflegt.

Der Schöpfer der Tetragonometrie ist Lambert (1770), der Polygonometrie Lexell (1775). Das erste Lehrbuch letzterer Disziplin schrieb 1789 Simon Lhuilier (1752—1833), wobei er von der Bestimmung des Flächeninhaltes ausging. Er ist auch der Begründer der Polyedrometrie (1799).

De Gua bewies 1783 den schon 1727 von F. C. Maier behaupteten Satz, daß man die ganze Trigonometrie aus dem Kosinussatze herleiten könne, — ein Beweis, den Lagrange (1799) und Gauß (1810) vereinfachten. Neue Formeln für andere Dreiecksstücke, für den Umfang, die Winkelsumme, den Radius des ein- und umgeschriebenen Kreises wurden in diesem Jahrhunderte aufgestellt. Man begann die Theorie der Kreisfunktionen auf andere Funktionen auszudehnen und die Frage nach dem rationalen Zusammenhange der Winkel und Winkelfunktionen zu untersuchen. An diesen Fortschritten beteiligten sich außer den genannten Mathematikern hauptsächlich Lagrange, Legendre, Carnot und Gauß.

Bedeutende trigonometrische Lehrbücher waren von Simpson (1748), Klügel (1770), Cagnoli (1786). Von

Tafelwerken sind hervorzuheben der „Thesaurus“ (1794) von Georg Freih. v. Vega (1756—1802) und seine sehr verbreiteten kleineren Tafeln von 1778.

Zur Fertigstellung der Lehre vom Differentiieren hatten schon Leibniz und L'Hospital das Nötige veröffentlicht. Ein ausführliches Lehrbuch der Differentialrechnung schuf Euler in den „Institutiones calculi differentialis“ (1755), einem für die Entwicklung der Reihentheorie bahnbrechenden Werke. Die Theorie der Maxima und Minima von mehreren Veränderlichen wurde von Euler in Angriff genommen, eine wesentliche Förderung aber erfuhr sie durch die erste Schrift von Lagrange (1759). Später (1779) behandelte Gianfrancesco Fagnano (1715—1797) diesen Gegenstand.

Auch die viel schwierigere Aufgabe des Integrierens machte besonders durch Cotes, Moivre und Euler, die eine große Menge von Integralen lösten, bedeutende Fortschritte. In den Anfängen war das Integral eine Fläche, also eine Summe unendlich vieler Elemente. Nachdem man aber entdeckt hatte, daß Differentiieren und Integrieren entgegengesetzte Operationen sind, bezeichnete man als $\int f(x)$ die Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist. Die Verschmelzung beider Rechnungen geschah in den „Institutiones analyticae“ (1765) von Riccati und Saladini.

Doppelintegrale behandelte Euler 1770, hierauf (1773) Lagrange dreifache Integrale. Euler führte 1775 Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen ein und gab in einer 1777 vollendeten (1793 gedruckten) Abhandlung die Hauptgleichungen zwischen partiellen Differentialen an, welche die Grundlage der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie geworden sind. Ein Lieblingsthema dieses großen Forschers bildeten die bestimmten

Integrale. Von bedeutendem Einflusse auf die Theorie der Transzendenten sind zwei bestimmte Integrale, die zuerst von Euler, und später von Legendre, der ihnen den Namen „Eulersche Integrale" gab, behandelt wurden. die Betafunktion und die Gammafunktion (1730). Der Hauptsatz der Theorie der Gammafunktionen ist in einer nachgelassenen Abhandlung Eulers (1790) ausgesprochen.

In betreff der Grundlagen der Infinitesimalrechnung bestand noch immer Unklarbeit und Uneinigkeit. Den höchsten Standpunkt nahm in dieser Hinsicht Lagrange ein, der 1797 versuchte, eine Theorie unabhängig vom Unendlichkleinen nur auf dem Wege der algebraischen Analysis zu begründen. Wenn er auch damit nicht durchzudringen vermochte, so bahnte er doch den Weg für jene Funktionentheorie, die sich unter den großen Analytikern des 19. Jahrh. mächtig entfaltete.

Als verbreitete Lehrbücher der Infinitesimalrechnung sind zu nennen: Euler, Institutiones calculi integralis (1768—1794); Lesueur und Pasquier, Calcul intégral (1768); Lacroix, Calcul différentiel et intégral (1797 bis 1798), und Lagrange, Théorie des fonctions analytiques (1797).

Zu den schwierigeren Partien der Integralrechnung, die um diese Zeit die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich zu ziehen begannen und späterhin große Bedeutung erlangten, gehören die elliptischen Integrale, deren Anfänge auf Joh. Bernoulli und den Grafen Giulio Fagnano (1682—1766) zurückführen, der 1718 und eingehender 1750 die Rektifikation der Lemniskate auf die der Ellipse und Hyperbel gründete. Euler verallgemeinerte die Untersuchungen Fagnanos und behandelte seit 1754 in zahlreichen Arbeiten den heute als

„Addionstheorem" bezeichneten Satz, daß die Summe oder Differenz zweier gleichartiger Integrale mit verschiedenen oberen Grenzen ein Integral von derselben Form ist, dessen obere Grenze von der der gegebenen Integrale abhängt. An diesen Untersuchungen beteiligten sich besonders G. F. Fagnano (Giulios Sohn) und Lagrange. Schon Maclaurin und d'Alembert hatten sich mit der Zurückführung von Integralen auf die Rektifikation der Ellipse und Hyperbel beschäftigt. 1753 begann Euler mit der Transformation elliptischer Integrale und ihrer Zurückführung auf Normalformen, 1766 sprach er den Gedanken aus, die Kegelschnittbogen als neue Transzendenten in die Analysis einzuführen, wie es mit den Kreisbogen und Logarithmen schon längst geschehen war. Von besonderer Wichtigkeit sind zwei Abhandlungen von John Landen (1719—1790) aus den Jahren 1771 und 1775. In der letzteren ist die Rektifikation eines Hyperbelbogens durch zwei Ellipsenbogen gezeigt, eine Entdeckung, deren Bedeutung Legendre 1788 klarlegte. Die Grundlage zur systematischen Behandlung elliptischer Integrale bildet eine Schrift Legendres von 1793, in der er drei Typen unterschied. Leider blieb diese Schrift wegen der Zeitwirren zunächst fast unbekannt, bis sie 1811 Verbreitung fand.

Die Probleme der Brachistochrone und der Isoperimetrie, mit denen sich Jakob und Johann Bernoulli, Clairaut u. a. befaßten, veranlaßten auch Euler zu mehreren Abhandlungen, die er 1744 in einem reichhaltigen Werke („Methodus inveniendi etc.") zusammenfaßte, worin er eine neue und allgemeine Darstellung der Variationsrechnung gab. Er verließ in diesem Werke den älteren geometrischen Standpunkt und näherte sich der Auffassung Lagranges, der in einer 1762 ver-

öffentlichten Abhandlung durch rein analytische Behandlung und eine passende Bezeichnungsweise der Variationsrechnung die bis jetzt noch überwiegend geometrischen Aufgaben der Maxima und Minima zu einem selbständigen analytischen Kalkül erhob. In einer zweiten Abhandlung (1770) finden sich schon Betrachtungen, welche die Aufstellung des „Lagrangeschen Multiplikators" zur Behandlung von Extremwerten impliziter Funktionen vorbereiten. Die Variation zweiter Ordnung untersuchte Legendre 1788 und gab eine, allerdings nicht ganz genügende Methode zur Untersuchung der Maxima und Minima.

Das schwierige Gebiet der Differentialgleichungen erfreute sich einer besonders eifrigen Pflege von seiten der größten Mathematiker des 18. Jahrh. Wenn auch die meisten einschlägigen Abhandlungen nur ganz spezielle Gleichungen behandeln, so verdanken wir doch vor allem Euler, Clairaut, Lagrange, Laplace und Monge die Aufstellung der wesentlichen allgemeinen Gesichtspunkte in dieser ausgedehnten Theorie. Die ersten Anfänge gehen zurück in die Zeit der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Das wesentlichste Moment in der Lösung der Gleichungen erster Ordnung mit zwei Variablen, die Trennung der Variablen, wurde schon 1697 von Joh. Bernoulli klar ausgesprochen. Sowohl er als auch sein Bruder Jakob lösten auf diesem Wege eine große Zahl von Differentialgleichungen, deren wichtigste die von letzterem den Mathematikern vorgelegte „Bernoullische Differentialgleichung" war. Leibniz und Johann Bernoulli kannten auch schon die Lösung der homogenen Differentialgleichung vermittels Trennung der Variablen. Mit der Lösung der homogenen und linearen Differentialgleichungen war die Aufgabe der

Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades bedeutend reduziert, da eine große Zahl komplizierterer Gleichungen sich auf jene zurückführen läßt. Von besonderer Bedeutung ist die nach dem Grafen Jacopo Riccati (1676—1754) benannte „Riccatische Differentialgleichung", mit der sich übrigens schon viel früher Jak. Bernoulli beschäftigt hatte.

Hatte man anfangs für jede Differentialgleichung ein Integral in endlicher geschlossener Form verlangt, so begann man jetzt umgekehrt nach Gleichungen zu fragen, die eine Integration durch eine endliche Zahl elementarer Funktionen gestatten. In diesem Sinne stellte d'Alembert 1773 Integrabilitätsbedingungen auf.

Unter den Integrationsmethoden allgemeinerer Art gehört zu den älteren die Einführung neuer Veränderlicher und die Ordnungserniedrigung, wobei besonders die Theorie des „integrierenden Faktors" („Eulerschen Multiplikators") eine bedeutende Rolle spielt, die 1734 durch Euler und unabhängig von ihm durch Alexis Fontaine (1705—1771) und Clairaut eingeführt wurde. Von viel größerer praktischer Bedeutung aber ist die Integration durch unendliche Reihen, wie sie Euler, Lagrange und Condorcet lehrten, und durch bestimmte Integrale, die besonders Euler pflegte. Unter den Näherungsverfahren ist besonders elegant die Lagrangesche Integration durch Kettenbrüche (1776), ferner die durch Laplace 1775 eingeführte Variation der Konstanten, deren sich Lagrange 1777 bediente beim Übergange von den unvollständigen zu den vollständigen Differentialgleichungen.

Die singulären Lösungen und deren Ermittlung durch abermalige Differentiation entdeckte Taylor (1715). Mit diesem Gegenstande beschäftigten sich

weiterhin Clairaut (1734), d'Alembert (1748), Euler (1756), Laplace (1772), Lagrange (1774), der zuerst die wahre Natur der singulären Integrale und ihren Zusammenhang mit dem vollständigen Integral erkannte, und Legendre (1797).

Von Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen behandelte die simultanen d'Alembert (1747 und 1748). Von den totalen hatten Euler und d'Alembert zunächst die linearen unvollständigen betrachtet, dann aber auch die vollständigen mit konstanten Koeffizienten (Eulers „charakteristische Gleichung"). Den Fortschritt zu nicht konstanten Koeffizienten machte Lagrange, wobei er zu der Gleichung gelangte, die wir „Lagrangesche Adjungierte" nennen, und eine allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen gab.

Der erste, der das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen betrat, war Euler (1734). Bevor aber die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zu weiterer Ausbildung gelangte, beschäftigten sich d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace u. a. aus Anlaß des Problems schwingender Saiten mit denen 2. Ordnung. Von einem allgemeineren Standpunkte behandelte die Gleichungen 1. Ordnung zuerst Lagrange in mehreren Abhandlungen (seit 1772), dann Laplace (seit 1775).

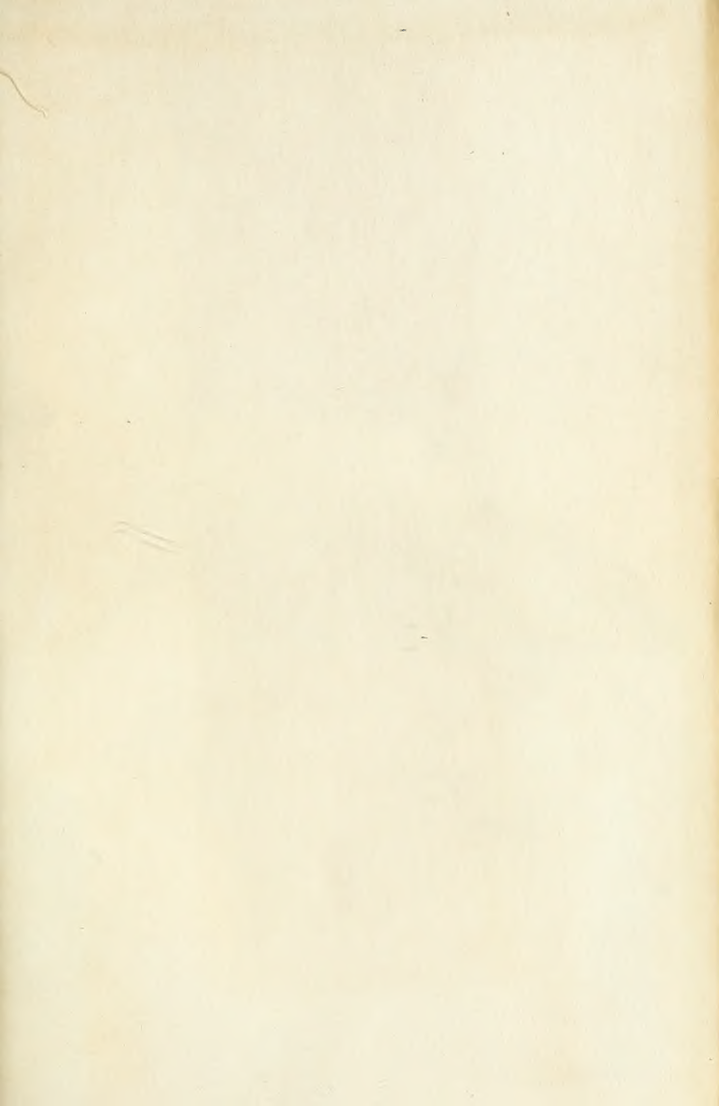
Mit der Theorie der höheren partiellen Differentialgleichungen befaßten sich gegen Ende des 18. Jahrh. besonders Euler, Condorcet, Monge, Laplace und Legendre. Bei allen diesen schwierigen Untersuchungen liegt das Hauptmoment in der Bestimmung und Deutung der willkürlichen Funktionen. Den größten Teil der wirklich integrierbaren partiellen Differentialgleichungen

höherer Ordnung findet man im 3. Bande von Eulers „Integralrechnung“. Für die vollständige Integration der linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit drei Veränderlichen gab Laplace unter gewissen Einschränkungen eine Methode (1773), die Legendre auf die Gleichung mit vier Veränderlichen und auf einige Fälle der linearen Gleichung 3. Ordnung ausdehnte. Die tiefgehendsten Untersuchungen über die Bestimmung der willkürlichen Funktionen sind von Monge angestellt worden (1773).

Wir finden um die Wende des 18. Jahrh. fast die gesamte mathematische Tätigkeit in Frankreich vereinigt. Aber bereits 1799 trat, wie erwähnt, in Deutschland Karl Friedrich Gauß (1777—1855) vor die Öffentlichkeit — der „Archimedes des 19. Jahrh.“, der, anfangs auf einsamer Höhe wandelnd, durch den belebenden Einfluß seines unerschöpflich reichen Genius die schlummernden Kräfte erweckte und die führende Stellung der deutschen Wissenschaft auf mathematischem Gebiete begründete.

Register.





Wirbellose Tiere. Das Tierreich VI: Die wirbellosen Tiere von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. der Zoologie. an der Universität Graz. II: Krebse, Spinnentiere, Tausendfüßer, Weichtiere, Moostierchen, Armfüßer, Stachelhäuter und Manteltiere. Mit 97 Figuren. Nr. 440.

Wirtschaftspflege. Kommunale Wirtschaftspflege von Dr. Alfons Rieß, Magistratsass. i. Berlin. Nr. 534.

Wohnungsfrage, Die, v. Dr. L. Pohle, Professor der Staatswissenschaften zu Frankfurt a. M. I: Das Wohnungswesen in der modernen Stadt. Nr. 495.

— — II: Die städtische Wohnungs- und Bodenpolitik. Nr. 496.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches,** von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

— **Technisches,** enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin. I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.

— — II. Teil: Englisch-Deutsch. Nr. 396.

— — III. Teil: Deutsch-Französ. Nr. 453.

— — IV. Teil: Französ.-Deutsch. Nr. 454.

Württemberg. Württembergische Geschichte v. Dr. Karl Weller, Prof. a. Karlsgymnas. i. Stuttgart. Nr. 462.

— **Landeskunde des Königreichs Württemberg** von Dr. K. Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Zeichenschule von Professor K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 200 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Zeitungswesen, Das deutsche, v. Dr. Rob. Brunhuber, Köln a. Rh. Nr. 400.

— **Das moderne,** (Syst. d. Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Zeitungswesens, Allgemeine Geschichte des, von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, Direktor der Kgl. Baugewerkschule in Münster i. W. Mit 132 Figuren. Nr. 57.

Zimmerarbeiten von Carl Opitz, Oberlehrer an der Kaiserl. Technisch. Schule in Straßburg i. E. I: Allgemeines, Balkenlagen, Zwischendecken u. Deckenbildungen, hölzerne Fußböden, Fachwerkswände, Hänge- und Sprengwerke. Mit 169 Abbild. Nr. 489.

— — II: Dächer, Wandbekleidungen, Simsschalungen, Block-, Bohlen- und Bretterwände, Zäune, Türen, Tore, Tribünen und Baugerüste. Mit 167 Abbildungen. Nr. 490.

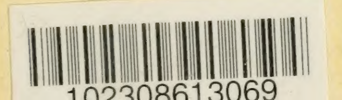
Zivilprozeßrecht, Deutsches, von Professor Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Zoologie, Geschichte der, von Prof. Dr. Rud. Burckhardt. Nr. 357.

Zündwaren von Direktor Dr. Alfons Bujard, Vorstand des Städtischen Chemischen Laboratoriums in Stuttgart. Nr. 109.

Zwangsversteigerung, Die, und die Zwangsverwaltung von Dr. F. Kretzschmar, Oberlandesgerichtsrat in Dresden. Nr. 523.

Weitere Bände sind in Vorbereitung.




GJG
17 85